ЕГЭ

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

Задача с экономическим содержанием

Профильный уровень

ЛЕГИОН™

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ

ЗАДАЧА С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Учебно-методическое пособие

ТМ

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2015

ББК 22.1
М 34

Рецензенты:

Л.С. Ольховая — учитель высшей категории

Л.Н. Евич — кандидат физико-математических наук

Авторский коллектив:

Кривенко В.М., Дерезин С.В., Коннова Е.Г., Резникова Н.М., Фридман Е.М., Ханин Д.И.

М 34 **Математика. ЕГЭ. Задача с экономическим содержанием**: учебно-методическое пособие. / Под. ред. Ф.Ф. Лысенко и С.Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2015. — 80 с. — (ЕГЭ).

ISBN 978-5-9966-0783-9

Данное учебно-методическое пособие поможет обучающимся подготовиться к выполнению нового задания с экономическим содержанием профильного уровня ЕГЭ по математике (номер 17 согласно проекту спецификации на 2016 год). В настоящем издании рассматриваются типовые задания на проценты, доли и соотношения, кредиты и вклады, производственные и бытовые задачи, а также задачи на нахождение экстремума.

Пособие адресовано обучающимся 10—11-х классов, учителям и методистам. Книга дополняет **учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»**.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать почтой или на электронный адрес: **legionrus@legionrus.com**.

Обсудить пособие, оставить замечания и предложения, задать вопросы можно на форумах издательства **http://f.legionr.ru**, **http://legion-posobiya.livejournal.com**.

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0783-9

Оглавление

От авторов

Данное пособие поможет обучающимся выработать устойчивые навыки работы с процентами, умение правильно считывать условие и составлять математическую модель по условию задачи, а также находить наибольшее и наименьшее значения как непрерывных функций (с использованием производной или без), так и функций, принимающих дискретные значения.

В книге рассмотрены некоторые наиболее типичные задачи с экономическим содержанием и методы их решения. Значительная часть задач предлагалась на ЕГЭ по математике в последние годы и охватывает такие темы, как проценты, доли, части, пропорциональное деление величины, наибольшее и наименьшее значения функций, а также собрана по принципу сюжетной, практической направленности (кредиты, вклады, оптимизация на производстве и т.д.). Наряду с задачами профильного уровня приведены задачи базового уровня, решение которых способствует освоению необходимых приёмов и методов.

В начале пособия читателю предлагается вариант диагностической работы, позволяющий оценить уровень предварительной подготовки обучающихся. Решения задач этого варианта приводятся в соответствующих по темам разделах книги.

В конце издания приведены два варианта итоговой работы, которые позволят проконтролировать уровень освоения тем, рассматриваемых в настоящей книге.

Диагностическая работа

1. Пирожок с мясом сто́ит на 50% дороже пирожка с джемом. На сколько процентов пирожок с джемом дешевле пирожка с мясом? Ответ округлите до целого числа процентов.

2. 15 января планируется взять кредит в банке на два года. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа последующего месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца, следующего за месяцем получения кредита, долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

3. Вкладчик внёс в банк 500 000 рублей под 20% годовых. В конце каждого из первых трёх лет после начисления процентов он дополнительно вносил одну и ту же сумму. К концу четвёртого года его вклад стал равным 1 364 400 руб. Какую сумму дополнительно вносил вкладчик в течение каждого из первых трёх лет?

4. Первичная информация некоторой фирмы распределяется по серверам 1 и 2. С сервера 1 при объёме ω^2 Гбайт входящей в него информации выходит 3ω Гбайт, а с сервера 2 при объёме ω^2 Гбайт входящей в него информации выходит 4ω Гбайт обработанной информации. Определите наибольший общий объём выходящей информации, если общий объём входящей информации равен 225 Гбайт.

5. Девятая часть персонала некоторого завода работает в заводоуправлении, ещё 55 сотрудников — в сборочном цехе, а остальные — в нескольких цехах, численность каждого из которых составляет $\frac{1}{7}$ от персонала завода. Чему равна общая численность персонала завода?

1. Проценты, доли и соотношения

Очень часто математические задачи экономического содержания требуют умения обращаться с процентами. Это обусловлено тем, что проценты широко распространены в реальной жизни при проведении различных операций, где возникают банковские проценты, проценты от зарплаты в качестве налога и т.д.

Коротко приведём основные математические факты, касающиеся этой темы, а также изложим некоторые правила, позволяющие облегчить решение заданий.

Процент от числа — это $\frac{1}{100}$ часть этого числа. Обозначается %.

При решении задач на проценты иногда удобно переходить к долям и относительным коэффициентам.
Если величина B равна $x\%$ от A, то

$$B = \frac{x}{100}A.$$

Если величина C увеличилась на x процентов, то она стала равняться

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)C.$$

Если величина C уменьшилась на x процентов, то она стала равняться

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right)C.$$

Аналогично, если $B = kA$ и $k > 1$, то B на $(k-1) \cdot 100\%$ больше A.

Если $B = kA$ и $k < 1$, то B на $(1-k) \cdot 100\%$ меньше A.

Если некоторая величина по условию задачи изменяется неоднократно с течением времени, то проценты всякий раз берутся от её последнего (текущего) значения, в случае когда противное не оговорено явно.

При всяком упоминании процентов важно чётко понимать, от какой базовой величины берутся эти проценты. Отсутствие указанного понимания неизбежно влечёт за собой распространённые ошибки. Необходимо различать утверждения «величина A больше величины B на α процентов» и «величина B меньше величины A на α процентов», которые не являются равносильными, так как проценты в них берутся от разных базовых величин.

Приведём основные формулы для начисления банковских процентов. При определённом опыте, конечно, задачи можно решать и без использования этих формул.

Простые проценты

В этом случае проценты каждый раз начисляются на первоначальную сумму A_0 вне зависимости от срока хранения вклада и начисленных перед этим процентов. Пусть $x\%$ начисляются в конце каждого периода по правилу простых процентов (в зависимости от условия задачи периодом может быть месяц, квартал, год и т.п.). Тогда через m периодов величина средств, лежащих на счету вкладчика, станет равной

$$A_m = \left(1 + m \cdot \frac{x}{100}\right) A_0.$$

Сложные проценты

В этом случае проценты каждый раз начисляются на всю имеющуюся на вкладе сумму (с учётом процентов, которые до этого были уже начислены и тем самым добавлены к сумме вклада). Пусть изначальная сумма вклада равна A_0 и $x\%$ начисляются в конце каждого периода по правилу сложных процентов (в зависимости от условия задачи периодом может быть месяц, квартал, год и т.п.). Тогда через m периодов величина средств, лежащих на счету вкладчика, станет равной

$$A_m = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^m A_0.$$

Изложим ещё некоторые теоретические положения, полезные при решении различных заданий.

Если некоторая численная величина A делится на две части в отношении $m : n$ (например, количество товаров первого и второго сорта), то первая часть равна $\frac{mA}{m+n}$, а вторая часть равна $\frac{nA}{m+n}$.

Аналогично, если некоторая численная величина A делится на три части в отношении $k : m : n$, то первая часть равна $\frac{kA}{k+m+n}$, вторая часть равна $\frac{mA}{k+m+n}$, а третья равна $\frac{nA}{k+m+n}$.

Подобные правила для отношений будут выполняться и в том случае, когда количество частей, на которые делится число, больше трёх.

Напомним некоторые определения и свойства целых чисел.

Натуральное число, большее 1, называется *простым*, если оно делится без остатка только на себя и на единицу. Примерами простых чисел могут служить 2, 3, 5, 7, 11, ... Натуральные числа, бо́льшие 1 и не являющиеся простыми, называются *составными*. Например, числа 4, 10, 45, 2014 — составные. Само число 1 по определению не является ни простым, ни составным.

Основная теорема арифметики

Любое натуральное число, большее 1, можно разложить в произведение простых множителей единственным образом (с точностью до порядка множителей).

Если натуральные числа m и n делятся нацело на натуральное число k, то число k называется *общим делителем* чисел m и n. *Наибольший общий делитель* чисел m и n обозначается НОД(a, b). Числа, не имеющие общих делителей, кроме 1, называются *взаимно простыми*.

Если a, b и c — натуральные числа, причём ab делится нацело на c, а НОД$(a,\ c) = 1$, то b нацело делится на c.

Аналогично, наименьшее натуральное число, которое делится на натуральные числа m и n, называется *наименьшим общим кратным* чисел m и n и обозначается НОК$(m,\ n)$.

Если имеет место равенство $x+y = z$, где x, y, z — натуральные числа, два из которых делятся на n, то третье число также делится на n.

Примеры решения различных задач на проценты, доли и соотношения

Пример 1. Магазин увеличил цену товара в 8 раз. Однако по результатам проверки антимонопольная служба предписала вернуть прежнюю цену. На сколько процентов придётся снизить цену?

Решение. Пусть изначально товар стоил x рублей. Тогда после подорожания он стал стоить $8x$ рублей. По результатам проверки цена снизилась на $7x$, что составляет $\frac{7x}{8x} \cdot 100\% = 87{,}5\%$ от суммы $8x$ рублей.

Ответ: 87,5.

Пример 2. Три одинаковых арбуза дороже дыни на 14%. На сколько процентов два таких же арбуза дешевле дыни?

Решение. Пусть x — цена одного арбуза, а y — цена дыни. Тогда $3x = y \cdot 1{,}14$. Отсюда $x = y \cdot 0{,}38$, следовательно $2x = 0{,}76y$. Так как

$0{,}76y$ составляет 76 процентов y, то стоимость двух арбузов на 24% меньше цены дыни.

Ответ: 24.

Пример 3. Пирожок с мясом сто́ит на 50% дороже пирожка с джемом. На сколько процентов пирожок с джемом дешевле пирожка с мясом? Ответ округлите до целого числа процентов.

Решение. Пусть пирожок с джемом стоит x, тогда пирожок с мясом стоит $1{,}5x$. Ясно, что $\frac{x}{1{,}5x} = \frac{2}{3}$. То есть цена пирожка с джемом меньше цены пирожка с мясом на $\frac{1}{3}$ от цены пирожка с мясом, то есть на $0{,}3333\ldots$, или на $33{,}33\ldots\% \approx 33\%$.

Ответ: 33%.

Пример 4. В начале мая цена на помидоры повысилась на 20%, а в начале июня понизилась на 20%. На сколько процентов цена помидоров в июне после понижения стала ниже, чем цена помидоров в мае до повышения?

Решение. Пусть x — цена килограмма помидоров в начале мая, до повышения. Тогда после повышения она стала $x \cdot 1{,}2$. После понижения цены в июне стоимость килограмма помидоров стала $x \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8$. Но $x \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}96x$. Так как $0{,}96x$ составляет 96% от x, то цена килограмма помидоров в июне после понижения стала ниже, чем цена помидоров в мае до повышения на 4%.

Ответ: 4.

Пример 5. Цена на автомобиль престижной марки ежегодно увеличивается на одно и то же число процентов по сравнению с предыдущим годом. На сколько процентов за каждый год увеличивалась цена автомобиля, если, выставленный на продажу за 2 560 000 рублей, он через два года был продан за 4 000 000 рублей?

Решение. Пусть цена автомобиля ежегодно увеличивалась на $p\%$, тогда через два года его стоимость увеличилась и стала равна

$2\,560\,000\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ рублей. Согласно условию, $2\,560\,000 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^2 =$

$= 4\,000\,000$. Отсюда, $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = \frac{4\,000\,000}{2\,560\,000} = \frac{2000^2}{1600^2} = \left(\frac{2000}{1600}\right)^2 =$

$= \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{125}{100}\right)^2$, $1 + \frac{p}{100} = \frac{125}{100} = 1 + \frac{25}{100}$, поэтому $p = 25$.

Ответ: 25.

Пример 6. Накануне Нового года некий предприниматель заказал из Бразилии 12 тонн ананасов. В Бразилии к отправке подготовили 12 тонн, при этом было определено, что процентное содержание жидкости в товаре составляет 98%. При разгрузке предприниматель выяснил, что доля жидкости уменьшилась до 94% за счёт усушки при транспортировке. Сколько тонн ананасов он разгрузил?

Решение. Будем считать, что ананас состоит из воды и сухого остатка, масса которого не изменяется при усушке. Изначально масса сухого остатка составляла $100\% - 98\% = 2\% = 0{,}02$ от общей массы и равнялась $0{,}02 \cdot 12 = 0{,}24$ (тонны). После усушки масса сухого вещества осталась равной 0,24 тонны, однако она стала составлять $100\% - 94\% = 6\% = 0{,}06$ от общей массы ананасов.

Значит, общая масса равняется $\frac{0{,}24}{0{,}06} = 4$ (тонны).

Последнее вычисление можно было сделать и с помощью пропорции:

$6\% - 0{,}24$ тонны

$100\% - x$ тонн.

$\frac{6}{100} = \frac{0{,}24}{x}$, $x = \frac{100 \cdot 0{,}24}{6}$, $x = 4$.

Ответ: 4 тонны.

Пример 7. Стоимость ноутбука и диска с необходимыми программами составляет 32 000 рублей. Покупатель может прямо в магазине воспользоваться услугой по установке программ или установить их позже самостоятельно. Стоимость данной услуги равна 3000 рублей. Василий Шурупкин обладает специальной картой, которая даёт ему 5% скидки на все товары (но не услуги) магазина. При этом, воспользовавшись скидкой, покупатель не имеет права отказаться от услуги по установке программ в магазине. Устанавливая программы самостоятельно, Василий потратит 4 часа личного времени. Укажите наименьшую стоимость часа личного времени Василия Шурупкина, при которой ему имеет смысл воспользоваться скидочной картой.

Решение. Посчитаем, сколько рублей заплатит Василий Шурупкин, если воспользуется скидочной картой: $0{,}95 \cdot 32\,000 + 3\,000 = 33\,400$ (рублей). Обозначим стоимость одного часа личного времени через x, тогда, если покупатель не воспользуется скидочной картой, стоимость его покупки, просуммированная со стоимостью личного времени, затраченного на установку программ, составит $(32\,000 + 4x)$ рублей. Значит, Василию Шурупкину следует воспользоваться скидочной картой, если $33\,400 \leqslant 32\,000 + 4x$, то есть $x \geqslant 350$.

Таким образом, наименьшая стоимость часа личного времени, при которой имеет смысл воспользоваться скидочной картой, составляет 350 рублей.

Ответ: 350 рублей.

Пример 8. Средняя заработная плата кабинетных работников на предприятии А. составляет 32 000 рублей. При этом средняя заработная плата остальных сотрудников — 28 000 рублей. Определите, сколько процентов сотрудников предприятия А. являются кабинетными служащими, если средняя заработная плата по всему предприятию равна 29 200 рублей.

Решение. Пусть на предприятии А. кабинетных служащих n человек, а остальных — m человек. Тогда по свойству среднего арифметического общий фонд заработной платы кабинетных служащих — $32\,000n$ рублей, а остальных сотрудников $28\,000m$ рублей. Но в этом случае средняя заработная плата по предприятию составляет $\dfrac{32\,000n + 28\,000m}{n+m}$ рублей, что по условию задачи равно 29 200 рублей.

Из уравнения $\dfrac{32\,000n + 28\,000m}{n+m} = 29\,200$ выразим m:

$$32\,000n + 28\,000m = 29\,200(n+m),\ 2800n = 1200m,$$

откуда $m = \dfrac{7}{3}n$.

Искомый процент равен

$$\frac{n}{n+m} \cdot 100\% = \frac{n}{n + \frac{7}{3}n} \cdot 100\% = \frac{1}{\frac{10}{3}} \cdot 100 = 30\%.$$

Ответ: 30.

Пример 9. С продуктовой базы в будние дни ежедневно отправляют в торговые точки 5000 плавленых сырков (равное количество в каждую точку). По воскресеньям 4 торговые точки не работают, зато в остальных точках продажи возрастают, и с базы в сумме отправляют в работающие точки на 20% сырков больше, распределяя их поровну. При этом в каждую работающую точку отправляется на 125 сырков больше, чем в другие дни. Сколько сырков отправляют в каждый задействованный магазин по воскресеньям?

Решение. Пусть в будние дни работает n торговых точек. Тогда в каждый магазин в будние дни отправляют $\frac{5000}{n}$ сырков. В выходные дни работает $n-4$ торговые точки, а всего сырков отправляется на 20% больше, то есть $1{,}2 \cdot 5000 = 6000$ сырков. При этом в каждую торговую точку отправляется $\frac{6000}{n-4}$ сырков, что по условию на 125 больше, чем в будние дни.

Составим и решим уравнение $\frac{6000}{n-4} - \frac{5000}{n} = 125$, $n > 4$,

$$\frac{48}{n-4} - \frac{40}{n} = 1,\ 48n - 40n + 160 = n^2 - 4n,$$

$$n^2 - 12n - 160 = 0,\ n_1 = -8,\ n_2 = 20.$$

Учитывая, что $n > 4$, получим $n = 20$. Тогда по воскресеньям в каждый магазин отправляют $\frac{6000}{20-4} = 375$ (сырков).

Ответ: 375.

Пример 10. Семья состоит из мужа, жены и их сына-студента. Если зарплата мужа увеличится вдвое, то общий доход семьи возрастёт на 50%. Если стипендия сына уменьшится в два раза, то общий доход семьи снизится на 10%. Сколько процентов от общего дохода составляет зарплата жены?

Решение. Пусть x_1, x_2 и x_3 — соответственно мужа, жены и их сына.

Тогда согласно условию $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1{,}5 \cdot (x_1 + x_2 + x_3), \\ x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2} = 0{,}9 \cdot (x_1 + x_2 + x_3). \end{cases}$

Из первого уравнения получаем $x_1 + (x_1 + x_2 + x_3) = 1{,}5 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$; $x_1 = 0{,}5 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$.

Из второго уравнения получаем $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1{,}8 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$; $x_1 + x_2 + (x_1 + x_2 + x_3) = 1{,}8 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$; $x_1 + x_2 = 0{,}8 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$.

Подставим $0{,}5 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$ вместо x_1 в левую часть предыдущего уравнения, получим $0{,}5 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) + x_2 = 0{,}8 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$; $x_2 = 0{,}3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$.

Отсюда следует, что зарплата жены составляет 0,3 общего дохода $x_1 + x_2 + x_3$. Значит, он составляет 30% общего дохода.

Ответ: 30.

Пример 11. Акционерное общество «Крыша и труба» израсходовало 40% своей годовой прибыли на реконструкцию производственной базы, 15% оставшихся денег — на премирование персонала, 1 800 000 рублей выплатило в качестве дивидендов. После всех этих расходов остался нераспределённым 21% прибыли. Сколько рублей составляла прибыль акционерного общества «Крыша и труба»?

Решение. Пусть прибыль составляла x рублей. Тогда на реконструкцию производственной базы было израсходовано $0{,}4x$ рублей, после чего осталось $0{,}6x$ рублей, 15% от этой суммы составляют $0{,}15 \cdot 0{,}6x = 0{,}09x$ рублей.

После выплаты дивидендов осталось $0{,}21x$ рублей.

Составим уравнение: $x - 0{,}4x - 0{,}09x - 1\,800\,000 = 0{,}21x$, откуда

$$0{,}3x = 1\,800\,000 \text{ и } x = 6\,000\,000.$$

Ответ: 6 000 000.

Пример 12. Производительность труда на заводе B больше, чем производительность труда на заводе A на p%. На сколько процентов производительность труда на заводе A ниже, чем производительность труда на заводе B? В ответе укажите число процентов.

Решение. Пусть α и β соответственно — производительность труда на заводах A и B. По условию $\beta = \alpha\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Пусть производительность труда на заводе A ниже, чем производительность труда на заводе B, на x%. Тогда $\alpha = \beta\left(1 - \frac{x}{100}\right)$. Отсюда $\alpha = \alpha \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$;

$$1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right);\ 1 - \frac{x}{100} = \frac{1}{1 + \frac{p}{100}};\ \frac{x}{100} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{p}{100}};$$

$$x = 100 - \frac{100}{1 + \frac{p}{100}} = \frac{100 + p - 100}{1 + \frac{p}{100}} = \frac{100 \cdot p}{100 + p}.$$

Ответ: $\frac{100 \cdot p}{100 + p}$.

Пример 13. Руководитель компании A решил распределить премиальный фонд за январь между тремя сотрудниками в соотношении $8:5:4$, но в итоге распределил тот же самый фонд в соотношении $7:7:6$ между теми же сотрудниками. В результате третий сотрудник получил на 22 000 рублей больше, чем получил бы согласно первоначальным условиям. Определите сумму премиального фонда за месяц (в рублях).

Решение. Пусть премиальный фонд за месяц составил x рублей. Изначально предполагалось, что первый сотрудник получит $8k$ рублей, второй — $5k$ рублей, а третий — $4k$ рублей. При этом $8k+5k+4k=x$, $k=\frac{x}{17}$. Значит, третий сотрудник должен был получить $\frac{4x}{17}$ рублей.

Пусть в итоге первый сотрудник получил $7m$ рублей, тогда второй тоже получил $7m$ рублей, а третьему досталось $6m$ рублей. Но $7m+7m+6m=x$, откуда $m=\frac{x}{20}$ и третий сотрудник получил $\frac{6x}{20}=\frac{3x}{10}$ рублей.

Согласно условию, сумма, которую выплатили третьему сотруднику, на 22 000 рублей больше изначально запланированной. Составим уравнение: $\frac{3x}{10}-\frac{4x}{17}=22\,000$, $\frac{51x}{170}-\frac{40x}{170}=22\,000$, $\frac{11x}{170}=22\,000$, $x=340\,000$. Таким образом, премиальный фонд за месяц составил 340 000 рублей.

Ответ: 340 000.

Пример 14. Цены на огурцы упали на $16\frac{2}{3}\%$. Для того чтобы сменить ценник, продавцу оказалось достаточным поменять местами цифры стоимости 1 кг огурцов. Сколько рублей стоил килограмм огурцов до удешевления, если эта цена выражалась двухзначным числом?

Решение. Пусть начальная цена огурцов равнялась $\overline{xy}$ рублей, где x, y — цифры, причём $x \geqslant 1$, так как число двузначно. Тогда эта цена составляла $(10x+y)$ рублей. После удешевления продавец переставил цифры, то есть цена стала равняться $\overline{yx}=10y+x$ (рублей).

По условию цена уменьшилась на $16\frac{2}{3}$ процентов, тогда

$$\frac{100-16\frac{2}{3}}{100}(10x+y)=10y+x,\text{ откуда } \frac{250}{3}(10x+y)=100(10y+x);$$

$5(10x + y) = 6(10y + x)$. Следовательно, $44x = 55y$ и $4x = 5y$. Значит, x делится на 5. Среди цифр, не равных 0, на 5 делится только цифра 5. Таким образом, $x = 5$, и значит, $y = 4$. Первоначальная цена равна 54 рублям.

Ответ: 54.

Пример 15. Девятая часть персонала некоторого завода работает в заводоуправлении, ещё 55 сотрудников — в сборочном цехе, а остальные — в нескольких цехах, численность каждого из которых составляет $\frac{1}{7}$ от персонала завода. Чему равна общая численность персонала завода?

Решение. Обозначим общее число сотрудников завода через n, а количество подразделений завода, не считая сборочного цеха и заводоуправления, через k. По условию задачи можно составить уравнение $\frac{n}{9}+\frac{kn}{7}+55=n$; откуда $\frac{8n}{9}-\frac{kn}{7}=55$ и после умножения обеих частей на 63 имеет место равенство $56n - 9kn = 55 \cdot 63$, то есть $n(56 - 9k) = 55 \cdot 63$. Следовательно, число $56 - 9k$ должно быть положительным делителем числа, стоящего в правой части. Из условия $56 - 9k > 0$ получим $k \leqslant 6$. Заметим, что при чётных k число $(56 - 9k)$ чётно, а значит, чётно и число $n(56 - 9k)$, в то время как $55 \cdot 63 = 5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ нечётно. Значит, равенство в этом случае выполняться не может и, следовательно, k нечётно. В силу ограничения $k \leqslant 6$ приходим к тому, что $k = 1$, $k = 3$ или $k = 5$.
При $k = 1$ получим $56 - 9k = 47$ — не является делителем числа $55 \cdot 63$.
При $k = 3$ получим $56 - 9k = 29$ — не является делителем числа $55 \cdot 63$.
При $k = 5$ получим $56 - 9k = 11$ — является делителем числа $55 \cdot 63$.

В последнем случае $n = \frac{55 \cdot 63}{11} = 315$.

Заметим, что число 315 делится и на 7, и на 9, откуда следует целочисленность количества сотрудников каждого отдела.

Ответ: 315 человек.

Задачи для самостоятельного решения

1. Фонд заработной платы фирмы А. составил 228 800 рублей и был распределён между Алексеем, Егором, Николаем, Петром и Григорием в соотношении 2 : 5 : 6 : 4 : 5 соответственно. Определите, сколько рублей получил Николай.

2. Призовой фонд лотереи в размере 1 200 000 рублей был распределён между семью победителями в соотношении 2 : 9 : 3 : 3 : 10 : 7 : 6. Сколько рублей получил третий победитель после уплаты подоходного налога в размере 13%?

3. Типография должна отпечатать за лето 268 000 книг. В первый месяц было изготовлено 15% запланированных книг, а во второй — 55% от оставшихся. Сколько книг необходимо отпечатать за третий месяц?

4. Цена пачки сосисок сначала повысилась на 14%. Сколько стоила пачка сосисок до повышения цены, если после последующего понижения цены на 15% она стоит 135 рублей 66 копеек?

5. Цена на мясо на городском рынке в начале декабря понизилась на 10%, а в конце декабря повысилась на 10%. На сколько процентов цена на мясо в конце декабря после повышения стала ниже, чем в начале декабря до понижения?

6. Восемь одинаковых пирожных дешевле торта на 12%. На сколько процентов 14 таких же пирожных дороже торта?

7. На организацию поиска клада Евгений, Пётр, Василий и Николай собрали 2 500 000 рублей. Евгений внёс 17% собранной суммы, Пётр внёс 250 000 рублей, Василий внёс 0,32 собранных денег, а остальные деньги внёс Николай. Они договорились, что в случае удачи прибыль будет делиться пропорционально проценту внесённых денег. Удача сопутствовала им, и они с учётом налогового вычета получили 6 000 000 рублей. Сколько рублей получил Николай?

8. Цена ноутбуков, не проданных в текущем году, уменьшалась каждый последующий год на одно и то же число процентов от предыдущей цены. На сколько процентов каждый год уменьшалась цена ноутбука, если, выставленный на продажу за 40 000 рублей, он через два года был продан за 23 104 рубля?

9. В течение года цена принтера два раза снижалась на один и тот же процент. Первоначальная цена составляла 8200 рублей. После второго снижения она составила 4018 рублей. На сколько процентов снижалась цена каждый раз?

10. Частный предприниматель продал куртки со скидкой 40% и получил при этом прибыль 80% (по сравнению с закупочной ценой). Определите, сколько процентов прибыли он предполагал получить первоначально?

11. Цена на пылесос, который продаётся в Брянске, ниже, чем цена на такой же пылесос, который продаётся в Астрахани, на $q\%$. На сколько процентов цена на пылесос в Астрахани выше, чем цена на пылесос в Брянске? В ответе укажите число процентов.

12. Первоначальная выработка продукции за год работы агрофермы возросла на $\alpha\%$, а на следующий год она стала на 20% больше, чем в предыдущем году. В результате после 2 лет работы годовая выработка увеличилась на 36,8% по сравнению с первоначальной. Найдите, чему равно α.

13. Универмаг закупил некоторое количество апельсинов и начал их реализацию по цене на 30% выше цены, назначенной поставщиком, чтобы покрыть затраты, связанные с транспортировкой, и некоторые другие дополнительные расходы. Оставшуюся после реализации часть апельсинов универмаг уценил на 18%, чтобы покрыть только затраты на закупку этой части товара у поставщика и транспортировку. Сколько процентов от цены, назначенной поставщиком, составляла транспортировка апельсинов?

14. Прежде чем попасть на прилавок магазина в деревне Обделёновка, мобильный телефон проходит через четырёх посредников, которые увеличивают цену предыдущего этапа на 20%, 25%, 30% и 20% соответственно. После этого владелец магазина сделал наценку, равную $\frac{1}{2}$ от цены, по которой он закупил товар у посредника. На сколько процентов больше придётся заплатить жителю деревни Обделёновка по сравнению с отпускной ценой компании-производителя?

15. Грамотное продвижение на рынке позволило компании за два года увеличить товарооборот в 25 раз, при этом ежегодный процент прироста оставался одним и тем же. Определите, на сколько процентов увеличивались продажи каждый год.

16. Бизнесмен Кроликов получил в 2005 году прибыль в размере 2000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 400% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Кроликов за 2008 год?

17. Компания «Икс» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2004 году, имея капитал в размере 8000 долларов. Каждый год, начиная с 2005 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. А компания «Игрек» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2006 году, имея капитал в размере 10 000 долларов, и, начиная с 2007 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 500% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2009 года, если прибыль из оборота не изымалась?

18. Некоторый завод производит велосипеды. В первом квартале планируется выпустить 30% годового плана, во втором — среднее арифметическое выпускаемого количества в остальных кварталах (в первом, третьем и четвёртом), в третьем — 24% от общего количества, в четвёртом — 8820 штук. Сколько велосипедов планируется выпустить за год?

19. Прибыль некоторой компании к концу года составила 8 610 000 рублей. Совет акционеров постановил распределить эту прибыль на 3 части: Y рублей направить в фонд развития компании, 80% от Y использовать для выплаты дивидендов акционерам, 25% от Y использовать на выплаты премий сотрудникам. Тем самым прибыль оказалась полностью исчерпана. Кроме того, было решено дополнительно выпустить акции для продажи на бирже ценных бумаг на сумму, равную 40% суммы выплаченных дивидендов в количестве 200 обыкновенных и 200 привилегированных (в 2 раза более дорогих) акций. Определите стоимость одной привилегированной акции.

20. В результате подорожания молока цена сливочного мороженого изменилась на 40%, а годовая выручка от его продаж выросла на 30 тысяч рублей. Первоначальная выручка от продаж составляла 600 тысяч рублей. На сколько процентов снизился объём продаж сливочного мороженого?

21. Магазин «Ветер» предлагает своим клиентам 8%-ную дисконтную карту за 1600 рублей. Если стоимость покупки (без скидки) при каждом посещении магазина составляет 300 рублей, то каким должно быть минимальное число посещений магазина в год, чтобы за этот период покупатель окупил приобретение дисконтной карты?

22. Компания «Царский апельсин» приобрела 400 тонн мандаринов по цене 3000 рублей за тонну. Перед погрузкой поставщик произвёл контрольное взвешивание партии, определив процентное содержание воды, которое равнялось 97% (по весу). После разгрузки в порту прибытия выяснилось, что в результате усушки процентное содержание воды снизилось до 95%. Далее «Царский апельсин» продал все мандарины розничной сети магазинов «Весёлый цукатик» по цене 18 000 рублей за тонну. Определите прибыль компании «Царский апельсин», если её транспортные и прочие расходы в сумме составили 1 460 000 рублей.

23. Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата жены увеличилась вчетверо, общий доход семьи вырос бы на 87%. Если бы стипендия дочери уменьшилась впятеро, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата мужа?

24. Средняя цена проданного пакета кефира в магазинах города Творожинск равна 68 рублям. А средняя цена проданного пакета ряженки — 82 рубля. Других кисломолочных продуктов в Творожинске нет. Известно, что 20% проданных пакетов — с ряженкой (среди кисломолочных продуктов). Определите среднюю цену пакета с кисломолочным продуктом в Творожинске.

25. В магазине одежды проводилась распродажа. Джинсы продавались со скидкой 30%, а футболка — со скидкой 40%. Покупатель приобрёл футболку и джинсы за 2310 рублей, заплатив на 34% меньше их суммарной стоимости без скидки. Определите первоначальную стоимость джинсов.

26. В магазин поступило платье по некоторой цене, и за январь его не смогли продать. В начале февраля хозяин магазина понизил цену платья на 20%, а продавец после этого прибавил к новой цене 200 рублей и ещё месяц пытался его продать. В начале марта хозяин понизил цену платья на 10%, но после этого продавец прибавил к получившейся цене 100 рублей и опять безуспешно пытался его продать. Тогда 1 апреля хозяин снизил цену на 30%, но продавец добавил к цене 300 рублей и опять вывесил платье на продажу. Покупатель, который второго апреля пришёл в магазин, обнаружил, что цена платья равна той, по которой оно продавалось при поступлении в магазин в январе. Какова же была первоначальная стоимость изделия?

27. Николай хочет приобрести ноутбук и установить на него некоторые программы. Покупатель может прямо в магазине воспользоваться услугой по установке программ или установить их позже самостоятельно. Стоимость услуги по установке программ равна 2000 рублей. Николай обладает специальной картой, которая даёт ему 3% скидки на все товары (но не услуги) торговой сети. Но, воспользовавшись скидкой, покупатель обязан воспользоваться и услугой по установке программ в магазине. Устанавливая программы самостоятельно, Николай потратит 5 часов времени, причём один час своего личного времени он оценивает в 232 рубля. Определите наименьшую стоимость ноутбука, при которой имеет смысл использовать скидочную карту.

28. Руководитель компании A решил распределить премиальный фонд за январь между тремя сотрудниками в соотношении $4:7:4$, но в итоге распределил тот же самый фонд в соотношении $2:3:5$ между теми же сотрудниками. В результате второй сотрудник получил на 19 000 рублей меньше, чем получил бы на первоначальных условиях. Определите сумму премиального фонда за месяц.

29. На Острове Невезения насчитывается 3 автомобильных завода. Согласно годовому плану количество выпущенных автомобилей должно быть распределено между заводами в соотношении $2:3:3$. Однако по результатам года оказалось, что общее количество выпущенных автомобилей больше запланированного на 80%, при этом количество выпущенных автомобилей распределено между заводами в соотношении $5:4:6$. На сколько процентов увеличил производство третий завод?

30. На острове Невезения три предпринимателя закупили на оптовой базе картошку по одинаковой цене для последующей перепродажи. Массы закупленной предпринимателями картошки соотносятся как $2:8:5$. Весь закупленный товар был распродан, причём выручка (деньги, полученные в результате продажи) предпринимателей распределилась в соотношении $3:8:9$. Определите, во сколько раз розничная цена у третьего предпринимателя была выше, чем у второго.

31. С утра в школьную столовую завезли пирожки с клубникой, малиной и вишней, причём их соотношение было $6:4:5$ соответственно. К концу учебного дня общее количество пирожков уменьшилось на 80%, а оставшихся пирожков стало поровну. Сколько процентов пирожков с малиной было съедено?

32. На распродаже цена 1 кг помидоров уменьшилась на 62,5%. Изначально её значение в рублях выражалось двузначным числом. Для того чтобы изменить ценник, продавец поменял на нём цифры местами. Сколько стоил 1 кг помидоров до распродажи?

33. Общий процент прибыли за весь товар, проданный в трёх магазинах компании «Вразнобой», составил 31,9%. Через первый магазин было продано 40% всего товара, через второй — 30% оставшейся части товара. Прибыль от продаж в первом магазине составила 40%, во втором — 30%. Определите процент прибыли от продажи товара в третьем магазине.

34. Общий процент прибыли за весь товар, проданный за год мебельным салоном «Пружина», составил 12,412%. При этом за I квартал было продано 20% всего товара, за II — 25% всего товара, за III — 30% оставшегося товара. Прибыль от продаж в I квартале составила 10%, во II — 20%, в III — 30%. Определите процент прибыли от продажи товара в IV квартале.

35. Популярность продукта A за 2012 год выросла на 25%, за 2013 год снизилась на 10%, а к концу 2014 года вдвое превышала популярность продукта B. В свою очередь популярность продукта B в 2012 году снизилась на 40%, в 2013 году возросла на 25%, а в 2014 году не изменялась. На сколько процентов возросла популярность продукта A за 2014 год, если в начале 2012 года она составляла $\frac{5}{6}$ от популярности продукта B?

36. Вновь созданное акционерное общество продало населению 2000 своих акций, установив скидки: 10% на каждую четвёртую продаваемую акцию и 30% на каждую одиннадцатую. В случае когда на одну акцию выпадают обе скидки, применяется бóльшая из них. Определите сумму, вырученную от продажи всех акций, если цена акции составляет 500 рублей.

37. Восьмая часть персонала некоторой фабрики работает в отделах управления, ещё 230 сотрудников в отделе упаковки, а остальные — в нескольких отделах, численность каждого из которых составляет $\frac{1}{9}$ от персонала фабрики. Чему равна наибольшая возможная численность персонала фабрики?

38. На некоторой фирме третья часть персонала работает в отделе управления, шестеро сотрудников — в отделе доставки, а остальные — в нескольких отделах, численность каждого из которых составляет $\frac{1}{4}$ от общей численности сотрудников фирмы. Определите количество различных отделов.

2. Кредиты

Кредит — это финансовая сделка, в результате которой кредитор (банк или другое финансовое учреждение) предоставляет на определённый срок деньги заёмщику. За пользование деньгами заёмщик, кроме погашения основного долга (называемого в финансовой литературе *телом кредита*), выплачивает также кредитору проценты. Разделение погашающих платежей на две части, отвечающие за погашение долга (тела кредита) и погашение процентных денег, принципиально важно, поскольку от этого зависят уплачиваемые налоги.

В этой главе будут рассмотрены два способа (схемы) погашения кредитов: *дифференцированная* (разными платежами, убывающими в арифметической прогрессии) и *аннуитетная* (равными платежами) — принятые и работающие во всём мире.

При *дифференцированной* схеме ежемесячный платёж включает в себя постоянную сумму для погашения основного долга по кредиту, к которой прибавляются проценты на оставшуюся часть долга. При этом регулярные платежи заёмщика оказываются различными. Методика расчёта платежей в этом случае базируется на использовании арифметической прогрессии. Процентный платёж за пользование потребительским кредитом обычно вычисляется «вперёд»: для первого месяца процентный платёж рассчитывается на всю величину долга, а в каждый следующий месяц — на остаток долга, т.е. величину долга, уменьшенную на уже выплаченную часть.

Если величина предоставленного кредита равна K, число одинаковых месячных выплат основного долга — m, годовая процентная ставка $p\%$, то платёж в первом месяце составит

$$x_1 = \frac{Kp}{1200},$$

во втором месяце:

$$x_2 = \left(K - \frac{K}{m}\right)\frac{p}{1200} = \frac{Kp}{1200}\left(1 - \frac{1}{m}\right) = x_1\frac{m-1}{m},$$

в третьем месяце:

$$x_3 = \left(K - 2\frac{K}{m}\right)\frac{p}{1200} = \frac{Kp}{1200}\left(1 - \frac{2}{m}\right) = x_1\frac{m-2}{m},$$

в m-м месяце:

$$x_m = \left(K - (m-1)\frac{K}{m}\right)\frac{p}{1200} = \frac{Kp}{1200}\left(1 - \frac{(m-1)}{m}\right) = x_1\frac{1}{m}.$$

Общая величина выплат за пользование предоставленным кредитом равна сумме всех рассмотренных процентных платежей:

$$X = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m =$$

$$= \frac{Kp}{1200}\left[1 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \left(1 - \frac{2}{m}\right) + \left(1 - \frac{3}{m}\right) + \ldots + \frac{1}{m}\right],$$

откуда

$$X = \frac{Kp}{1200}\frac{m}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right),$$

или

$$X = \frac{Kp}{2400}(m+1).$$

На сегодняшний день бо́льшим спросом среди заёмщиков пользуется *аннуитетная* схема: заёмщику удобно, когда сумма ежемесячного (ежеквартального или ежегодного) платежа фиксируется на весь срок кредитования.

Покажем, как рассчитать ежегодный платёж по кредиту на основе аннуитетной схемы.

Пусть кредит в размере S рублей выдан на n лет под $p\%$ годовых и пусть x — ежегодный платёж по кредиту. Тогда полная выплата по кредиту составит $X = nx$ рублей. Найдём x и X для наиболее простых в расчёте схем ($n = 2; 3; 4$).

Ежегодное начисление $p\%$ на остаток долга соответствует умножению на коэффициент $q = 1 + 0{,}01p$. После первой выплаты сумма долга составит:

$$S_1 = Sq - x.$$

После второй выплаты сумма долга составит:

$$S_2 = S_1q - x = (Sq - x)q - x = Sq^2 - xq - x = Sq^2 - (q+1)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга составит:

$$S_3 = S_2q - x = Sq^3 - \left(q^2 + q\right)x - x = Sq^3 - \left(q^2 + q + 1\right)x =$$

$$= Sq^3 - \frac{q^3 - 1}{q - 1}x.$$

И наконец, после четвёртой выплаты сумма долга составит:

$$S_4 = S_3q - x = Sq^4 - \left(q^3 + q^2 + q\right)x - x = Sq^4 - \left(q^3 + q^2 + q + 1\right)x =$$

$$= Sq^4 - \frac{q^4 - 1}{q - 1}x.$$

Таким образом, если $n = 2$, т.е. кредит был выдан на 2 года, то $S_2 = 0$. Тогда

$$Sq^2 - (q+1)x = 0, \text{ откуда } x = \frac{Sq^2}{q+1}.$$

Полная выплата по кредиту в этом случае составит $X = 2x = 2\dfrac{Sq^2}{q+1}$.

Если $n = 3$, т.е. кредит был выдан на 3 года, то $S_3 = 0$. Тогда

$$Sq^3 - \frac{q^3 - 1}{q - 1}x = 0, \text{ откуда } x = \frac{Sq^3(q-1)}{q^3 - 1}.$$

Полная выплата по кредиту составит $X = 3x = 3\dfrac{Sq^3(q-1)}{q^3 - 1}$.

Если $n = 4$, т.е. кредит был выдан на 4 года, то $S_4 = 0$. Тогда

$$Sq^4 - \frac{q^4 - 1}{q - 1}x = 0, \text{ откуда } x = \frac{Sq^4(q-1)}{q^4 - 1}.$$

Полная выплата по кредиту составит $X = 4x = 4\dfrac{Sq^4(q-1)}{q^4 - 1}$.

Отметим, что при решении практических задач часто удобнее проводить вычисления, используя обыкновенные дроби вместо десятичных. Так, если годовая процентная ставка $p = 25\%$, то ей соответствует коэффициент $q = 1 + \dfrac{25}{100} = \dfrac{5}{4}$. А если $p = 20\%$, то $q = 1 + \dfrac{20}{100} = \dfrac{6}{5}$.

Примеры решения задач

Пример 16. Предприниматель обратился в банк с просьбой о предоставлении ссуды в размере 1 000 000 рублей сроком на 1 год. Банк выделил ему эту ссуду с годовой процентной ставкой в 20% при условии погашения ссуды одним платежом в конце срока. Какую сумму должен через год возвратить предприниматель банку? Какие процентные деньги получит банк?

Решение. Через год предприниматель должен вернуть банку

$$1\,000\,000 \cdot 1{,}2 = 1\,200\,000 \text{ (рублей)},$$

банк на этом заработает

$$1\,200\,000 - 1\,000\,000 = 200\,000 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 1 200 000 рублей; 200 000 рублей.

Пример 17. Клиент взял в банке кредит 18 000 рублей на год под 14%. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

Решение. Клиент будет вносить ежемесячно

$$\frac{18\,000 \cdot 1{,}14}{12} = \frac{20\,520}{12} = 1710 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 1710 рублей.

Пример 18. 20 декабря 2014 года Сергей Михайлович взял в банке 800 000 рублей в кредит. План выплаты кредита такой: 20 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем Сергей Михайлович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Сергей Михайлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 360 000 рублей?

Решение. Очевидно, что чем больше Сергей Михайлович будет выплачивать в месяц, тем быстрее он погасит кредит. Поэтому предположим, что первые месяцы Сергей Михайлович будет выплачивать ровно по 360 000 рублей, а в последний месяц эта сумма может оказаться меньше.

Через месяц после того, как кредит был взят, в результате начисления процентов Сергей Михайлович окажется должен $1{,}02 \cdot 800\,000 = 816\,000$ рублей, а после ежемесячной выплаты эта сумма составит $816\,000 - 360\,000 = 456\,000$ рублей. Ещё через месяц размер долга возрастёт до $1{,}02 \cdot 456\,000 = 465\,120$ рублей и после очередной выплаты

4. Зак. № 39

уменьшится до 105 120 рублей. Наконец, ещё через месяц этот долг возрастёт до $1{,}02 \cdot 105\,120 = 107\,222{,}4$ рублей, и Сергей Михайлович погасит кредит.

Таким образом, минимальное количество месяцев, на которое Сергей Михайлович может взять кредит, равно 3.

Ответ: 3.

Пример 19. Клиент взял 15 960 000 рублей в кредит под 30% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 30%), затем клиент переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы клиент выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение. Пусть искомый ежегодный платёж составляет x рублей. Тогда в конце первого года клиент будет должен

$$1{,}3 \cdot 15\,960\,000 - x = 20\,748\,000 - x \text{ (рублей)}.$$

Аналогично, в конце второго года его долг составит $\big(1{,}3 \cdot (20\,748\,000 - x) - x\big) = 26\,972\,400 - 2{,}3x$ рублей, а к концу третьего $1{,}3 \cdot (26\,972\,400 - 2{,}3x) - x = 35\,064\,120 - 3{,}99x$ рублей. Однако по условию клиент должен выплатить кредит тремя равными платежами, то есть в конце третьего года его долг должен составить 0 рублей. Составим и решим уравнение $35\,064\,120 - 3{,}99x = 0$; $x = 8\,788\,000$.

Ответ: 8 788 000 рублей.

Пример 20. Двадцать пятого ноября 2013 года Иван взял в банке 2 млн рублей в кредит. План выплаты кредита такой: 25 ноября каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, то есть увеличивает долг на $x\%$, а затем Иван переводит очередной транш. Иван выплатил кредит за 2 транша, переведя в первый раз 1 210 000 рублей, а во второй — 1 219 800 рублей. Под какой годовой процент банк выдал кредит Ивану?

Решение. После начисления процентов в конце первого года сумма, которую должен выплатить Иван, возрастает до $2\,000\,000 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)$ рублей, из них Иван выплачивает 1 210 000 рублей, уменьшая тем самым сумму долга до $\left(2\,000\,000 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right) - 1\,210\,000\right)$ рублей.

В конце второго года сумма долга снова возрастает на $x\%$ и, таким образом, становится равной

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)\cdot\left(2\,000\,000\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)-1\,210\,000\right).$$

Заплатив 1 219 800 рублей, Иван погашает кредит, то есть

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)\cdot\left(2\,000\,000\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)-1\,210\,000\right)=1\,219\,800.$$

В этом уравнении сделаем замену $y=\left(1+\frac{x}{100}\right)$ $(y>1)$ и разделим обе части на 200, получим

$$y\cdot\left(10\,000y-6050\right)=6099,\ 10\,000y^2-6050y-6099=0.$$

$D=6050^2+4\cdot10\,000\cdot6099=50^2(121^2+4\cdot4\cdot6099)=50^2(14\,641+97\,584)=$
$=50^2\cdot112\,225=50^2\cdot5^2\cdot4489.$

Отсюда

$$y_{1,2}=\frac{6050\pm50\cdot5\cdot\sqrt{4489}}{2\cdot10\,000}=\frac{121\pm5\cdot67}{400}=\frac{121\pm335}{400}.$$

$$y=\frac{456}{400}=\frac{114}{100}=1{,}14,\text{ откуда } x=14.$$

Ответ: 14.

Пример 21. Банк выдал заёмщику кредит в размере 30 000 рублей, ежегодная выплата по кредиту составляет 10 000 рублей (последний платеж может отличаться от остальных в меньшую сторону), процентная ставка — 20% годовых. Через сколько лет кредит будет погашен? Сколько составит переплата?

Решение. Составим таблицу погашения кредита.

Сумма кредита	Ежегодная выплата	Проценты по кредиту	Погашение тела кредита	Тело кредита на начало след. года
30 000	10 000	6000	4000	26 000
26 000	10 000	5200	4800	21 200
21 200	10 000	4240	5760	15 440
15 440	10 000	3088	6912	8528
8528	8528			0

Переплата составит $48\,528-30\,000=18\,528$ рублей.

Ответ: 5 лет; 18 528 рублей.

Пример 22. 15 января был выдан кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг выражается в процентах от кредита.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Текущий долг	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивается на 4%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение. Пусть S — сумма кредита; x_1, x_2, ..., x_6 — выплаты в первой половине февраля, марта и т.д. Составим уравнения, которые соответствуют графику погашения кредита:

$$\text{на } 15.02: \quad 1{,}04S - x_1 = 0{,}9S,$$

$$\text{на } 15.03: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}9S - x_2 = 0{,}8S,$$

$$\text{на } 15.04: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}8S - x_3 = 0{,}7S,$$

$$\text{на } 15.05: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}7S - x_4 = 0{,}6S,$$

$$\text{на } 15.06: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}6S - x_5 = 0{,}5S,$$

$$\text{на } 15.07: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}5S - x_6 = 0.$$

Сложим все уравнения.

$$1{,}04S \cdot (1 + 0{,}9 + \ldots + 0{,}5) - (x_1 + x_2 + \ldots + x_6) = S \cdot (0{,}9 + 0{,}8 + \ldots + 0{,}5).$$

Пусть $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_6$ — общая сумма выплат. Поскольку $5 + 6 + \ldots + 9 = \frac{5+9}{2} \cdot 5 = 35$, имеем уравнение

$$1{,}04S \cdot 4{,}5 - X = S \cdot 3{,}5,$$

$$X = S \cdot (1{,}04 \cdot 4{,}5 - 3{,}5) = 1{,}18S.$$

Таким образом, общая сумма выплат на 18% больше суммы самого кредита.

Ответ: 18.

Пример 23. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 18 млн рублей?

Решение. Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$10,\ \frac{10(n-1)}{n}, \ldots,\ \frac{10\cdot 2}{n},\ \frac{10}{n},\ 0.$$

По условию каждый январь долг возрастает на 20%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$12,\ \frac{12(n-1)}{n}, \ldots,\ \frac{12\cdot 2}{n},\ \frac{12}{n},\ 0.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$2+\frac{10}{n},\ \frac{2(n-1)+10}{n}, \ldots,\ \frac{4+10}{n},\ \frac{2+10}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$10+2\cdot\left(\frac{n+(n-1)+\ldots+2+1}{n}\right)=10+2\cdot\frac{n+1}{2}=n+11 (\text{млн рублей}).$$

Общая сумма выплат равна 18 млн рублей, поэтому $n=7$.

Ответ: 7.

Пример 24. 15 января планируется взять кредит в банке на два года. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа последующего месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца, последующего за месяцем получения кредита, долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 25% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение. Пусть K — сумма кредита. Тогда, согласно условию возврата кредита, эта сумма будет ежемесячно уменьшаться на одну и ту же сумму, равную $\frac{K}{24}$, поэтому на каждое 15-е число, считая от месяца получения кредита, сумма долга составляет:

$$K,\ \frac{23}{24}K,\ \frac{22}{24}K,\ \ldots,\ \frac{2}{24}K,\ \frac{1}{24}K,\ 0.$$

Выплаты по кредиту со 2-го по 14-е число, согласно условию, будут, начиная с последующего месяца за месяцем получения кредита, таковы:

$$K \cdot \frac{r}{100} + \frac{K}{24},\ \frac{23}{24}K \cdot \frac{r}{100} + \frac{K}{24},\ \frac{22}{24}K \cdot \frac{r}{100} + \frac{K}{24},\ \ldots,$$

$$\frac{2}{24}K \cdot \frac{r}{100} + \frac{K}{24},\ \frac{1}{24}K \cdot \frac{r}{100} + \frac{K}{24}.$$

Сумма всех выплат равна

$$K + \frac{K}{24} \cdot \frac{r}{100} \cdot (24 + 23 + 22 + \ldots + 2 + 1) =$$

$$= K \cdot \left(1 + \frac{r}{24 \cdot 100} \cdot \frac{25 \cdot 24}{2}\right) = K \cdot \left(1 + \frac{r}{8}\right).$$

В соответствии с условием составим пропорцию:
K — 100%;
$K \cdot \left(1 + \frac{r}{8}\right)$ — 125%.

Отсюда $K \cdot 125\% = K \cdot \left(1 + \frac{r}{8}\right) \cdot 100\%,\ 1 + \frac{r}{8} = \frac{5}{4},\ r = 2.$

Ответ: 2.

Задачи для самостоятельного решения

39. Клиент взял в банке кредит 72 000 рублей на год под 14%. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?

40. Андрей взял в банке кредит 1 500 000 рублей на три года при условии:

— долг будет возвращаться тремя платежами, производимыми в конце каждого из трёх лет;

— имеющийся в начале каждого (начиная с первого) года долг будет в конце года увеличиваться на 15%;

— в конце года уже после начисления процентов долг надо возместить в такой сумме, чтобы остаток был равным сумме, указанной в таблице:

Год	1	2	3
Долг	1 000 000	400 000	0

а) Сколько рублей придётся переплатить Андрею за кредит?

б) На сколько процентов больше суммы взятого кредита придётся заплатить Андрею?

41. Элеонора взяла в банке кредит 1 000 000 рублей на три года при условии:

— долг будет возвращаться тремя платежами, производимыми в конце каждого из трёх лет;

— имеющийся в начале каждого (начиная с первого) года долг будет в конце года увеличиваться на 15%;

— в конце года уже после начисления процентов долг необходимо возместить в такой сумме, чтобы остаток был равным сумме, указанной в таблице:

Год	1	2	3
Долг	600 000	300 000	0

а) Сколько рублей придётся переплатить Элеоноре за кредит?

б) На сколько процентов больше суммы взятого кредита придётся заплатить Элеоноре?

42. Иван Петрович 15 января 2014 года взял в банке кредит в 1,5 млн рублей. План расчёта по кредиту такой: 15 числа каждого следующего месяца банк начисляет 0,5% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 0,5%), затем Иван Петрович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Иван Петрович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300 тысяч рублей?

43. Дмитрий хочет взять в кредит 2 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными платежами (кроме, быть может, последнего). Процентная ставка по кредиту 12% годовых. Ежегодный платёж осуществляется после начисления процентов. На какое минимальное количество лет Дмитрий может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 750 тысяч рублей?

44. 15 марта 2012 года Олег взял в банке 2 150 000 рублей в кредит под 15% годовых. При этом 15 марта каждого года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 15%). После начисления процентов Олег переводит в банк z рублей. Какой должна быть сумма z, чтобы Олег выплатил долг двумя равными платежами, то есть за 2 года?

45. Софья 10 декабря 2014 года взяла в банке некоторую сумму в кредит под 15% годовых. План выплаты кредита следующий: 10 декабря каждого последующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 15%), затем Софья переводит в банк 2 645 000 рублей. Какую сумму взяла Софья в банке, если она выплатила долг двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

46. Первого декабря 2014 года Тимофей взял в банке 6 620 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита такая: 1 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, то есть увеличивает долг на 10%, затем Тимофей переводит в банк y рублей. Какой должна быть сумма y, чтобы Тимофей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

47. 15 февраля 2014 года Андрей взял в банке некоторую сумму в кредит под 12% годовых. Схема выплаты такая: 15 февраля каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12%), затем Андрей переводит в банк 351 232 рубля. Какую сумму взял Андрей в банке, если он выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

48. Николай Петрович получил кредит в банке под определённый процент годовых. Ровно через год (но уже после начисления процентов) Николай Петрович в счёт погашения кредита вернул $\frac{2}{13}$ той суммы, которую задолжал к тому моменту. А ещё через год он внёс сумму, на 43% превышающую величину займа, и тем самым полностью погасил кредит. Каким был процент годовых?

49. В июле планируется взять кредит на сумму 4 100 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом прошлого года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

50. В июле планируется взять кредит на сумму 5,8 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 12,5% по сравнению с концом прошлого года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько млн рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года) по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

51. 5 декабря 2014 года Игорь взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита такова: 5 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на x%), затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 640 тысяч рублей, а во второй — 537,6 тысяч рублей. Под какой ежегодный процент банк выдал кредит Игорю?

52. 15 января 2014 года Виктор взял в банке некоторую сумму в кредит под определённый процент годовых. Схема выплаты кредита такая: 15 января каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, то есть увеличивает долг на α%, затем Виктор переводит очередной транш. Если он рассчитается по кредиту двумя равными платежами (за 2 года), то сумма каждой выплаты составит 1 337 050 рублей. Если же он рассчитается по кредиту четырьмя равными платежами (за 4 года), то сумма каждой выплаты составит 732 050 рублей. Под какой процент годовых Виктор взял деньги в банке?

53. 15 января был выдан кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг выражается в процентах от кредита.

5. Зак. № 39

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Текущий долг	100%	85%	70%	55%	40%	25%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивается на 4%, а выплаты по погашению кредита происходят в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

54. 15 января был выдан кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг выражается в процентах от кредита.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Текущий долг	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивается на 6%, а выплаты по погашению кредита происходят в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

55. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 21 млн рублей?

56. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 2,4 млн рублей?

57. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 2,25 млн рублей?

58. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на срок 5 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 4,4 млн рублей, а наименьший — не менее 2,48 млн рублей.

59. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 12 млн рублей на срок 10 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найдите r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 3,84 млн рублей, а наименьший — не менее 1,464 млн рублей.

60. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 14 млн рублей на 5 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько миллионов рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

61. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 4 млн рублей на 12 лет. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько миллионов рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

62. Валентин взял в банке кредит в размере 1 млн рублей на 2 года. По договору он должен возвращать часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 1%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Валентином банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Валентином, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму вернёт банку Валентин после полного погашения кредита? Ответ дайте в млн рублей.

63. Егор взял в банке кредит на 2 года. По договору он должен возвращать часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Егором банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Егором, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. На сколько процентов общая сумма, выплаченная Егором после полного погашения кредита, больше суммы, взятой в кредит?

64. Маргарита взяла кредит в банке на срок 22 месяца. По договору Маргарита должна вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется $r\%$ этой суммы, и своим ежемесячным платежом Маргарита погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму основного долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц. Известно, что общая сумма, выплаченная Маргаритой банку за весь срок кредитования, оказалась на 23% больше, чем сумма, взятая ею в кредит. Найдите r.

65. 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

3. Вклады

Вкладом является денежная сумма или другие ценности, которые человек отдаёт в банк на определённых условиях, подразумевающих начисление процентов за определённый период на вложенную сумму.

Например, если в банк была вложена сумма A под $p\%$ на некоторый период времени t, то по истечении этого времени вложенная сумма увеличится на $p\%$ от числа A, значит, станет равной $A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Примеры решения задач

Пример 25. Семён Петрович положил 8000 рублей в сберегательный банк. По истечении года к его вкладу были добавлены деньги, начисленные в качестве процентов, и, помимо этого, Семён Петрович увеличил свой вклад на 1360 рублей. Ещё через год он решил снять 1440 рублей, а остальные 9360 рублей положил на новый срок. Чему равна процентная ставка в этом банке?

Решение. Пусть процентная ставка в этом банке равна $p\%$. Тогда ровно через год вклад Семёна Петровича будет составлять

$8000 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)$ рублей. После увеличения на 1360 рублей он будет составлять $\left(8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1360\right)$ рублей. Через год вклад будет составлять

$\left(8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1360\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ рублей.

По условию получаем уравнение

$$\left(8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1360\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 1440 = 9360.$$

Отсюда $\left(8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1360\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 10\,800 = 0,$

$$8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 + 1360 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 10\,800 = 0.$$

Пусть $1 + \frac{p}{100} = x$ $(x > 0)$, тогда $8000 \cdot x^2 + 1360 \cdot x - 10\,800 = 0$,
$100 \cdot x^2 + 17 \cdot x - 135 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 + 54\,000}}{200} = \frac{-17 \pm 233}{200}.$$

$$x = \frac{216}{200} = \frac{108}{100} = 1 + \frac{8}{100}.$$

Это означает, что $p = 8$.

Ответ: 8%.

Пример 26. Вкладчик внёс в банк 500 000 рублей под 20% годовых. В конце каждого из первых трёх лет после начисления процентов он дополнительно вносил одну и ту же сумму. К концу четвёртого года его вклад стал равным 1 364 400 руб. Какую сумму в рублях дополнительно вносил вкладчик в течение каждого из первых трёх лет?

Решение. Обозначим сумму в рублях, которую дополнительно вносил вкладчик в течение каждого из первых трёх лет, через x. К концу первого года после начисления процентов и внесения дополнительной суммы его вклад составил $500\,000 \cdot 1{,}2 + x$.

К концу второго года после внесения дополнительной суммы он равнялся $(500\,000 \cdot 1{,}2 + x) \cdot 1{,}2 + x$ (рублей).

К концу третьего года после внесения дополнительной суммы он был $((500\,000 \cdot 1{,}2 + x) \cdot 1{,}2 + x) \cdot 1{,}2 + x$ (рублей).

Наконец, к концу четвёртого года он стал
$(((500\,000 \cdot 1{,}2 + x) \cdot 1{,}2 + x) \cdot 1{,}2 + x) \cdot 1{,}2$ (рублей).

Согласно условию, получаем уравнение
$(((500\,000 \cdot 1{,}2 + x) \cdot 1{,}2 + x) \cdot 1{,}2 + x) \cdot 1{,}2 = 1\,364\,400$,
$500\,000 \cdot 1{,}2^4 + ((1{,}2 \cdot x + x) \cdot 1{,}2 + x) \cdot 1{,}2 = 1\,364\,400$.

Так как $1{,}2^4 = 2{,}0736$ и $((1{,}2 \cdot x + x) \cdot 1{,}2 + x) \cdot 1{,}2 = 4{,}368x$, то
$500\,000 \cdot 2{,}0736 + 4{,}368x = 1\,364\,400$,
$1\,036\,800 + 4{,}368x = 1\,364\,400$,
$4{,}368x = 327\,600$,

$$x = \frac{327\,600}{4{,}368} = 75\,000.$$

Ответ: 75 000 рублей.

Пример 27. Вкладчик разместил в банке 32 тысячи рублей. Несколько лет он получал то 5%, то 10% годовых, а за последний год получил 25% годовых. При этом проценты начислялись в конце каждого года и добавлялись к сумме вклада. В результате его вклад стал равным 53 361 рублю. Сколько лет пролежал вклад?

Решение. Не будем забывать про единицы измерения, так как одна из величин в условии задачи дана в рублях, а другая — в тысячах рублей.

Пусть вклад пролежал k лет под 10% годовых и n лет под 5% годовых. Тогда после $k+n$ лет вклад составил $32\,000 \cdot 1{,}1^k \cdot 1{,}05^n$. Пролежав ещё год, вклад достиг $32\,000 \cdot 1{,}1^k \cdot 1{,}05^n \cdot 1{,}25 = 40\,000 \cdot 1{,}1^k \cdot 1{,}05^n$, при этом общий срок хранения вклада $k+n+1$ лет.

Составим уравнение $40\,000 \cdot 1{,}1^k \cdot 1{,}05^n = 53\,361$. Домножив обе части этого уравнения на $10^k \cdot 100^n$, получим $40\,000 \cdot 11^k \cdot 105^n = 53\,361 \cdot 10^k \cdot 100^n$, то есть $40\,000 \cdot 11^k \cdot 15^n \cdot 7^n = 53\,361 \cdot 10^k \cdot 100^n$. Обе части этого равенства — натуральные числа, поэтому они единственным образом раскладываются на простые множители. В левой части простой множитель 7 встречается n раз, а в правой части он встречается столько раз, сколько раз 7 присутствует в разложении числа 53 361, так как числа 10^k и 100^n на 7 не делятся. Последовательно будем делить число 53 361 на 7 до тех пор, пока это возможно. Таким образом, установим, что $53\,361 = 7^2 \cdot 1089$, причём 1089 на 7 не делится. Но тогда $n = 2$. Следовательно, $40\,000 \cdot 11^k \cdot 15^2 = 1089 \cdot 10^k \cdot 100^2$, $4 \cdot 11^k \cdot 5^2 \cdot 3^2 = 1089 \cdot 10^k$. Сократив обе части последнего равенства на 9, получим $100 \cdot 11^k = 121 \cdot 10^k$, откуда $\left(\frac{11}{10}\right)^k = \left(\frac{11}{10}\right)^2$ и $k = 2$.

Общий срок хранения вклада равен $k+n+1 = 5$ лет.

Ответ: 5.

Пример 28. Вкладчик положил в банк некоторую сумму. Укажите такое наименьшее целое значение r, чтобы при ставке годовых $r\%$ (это значит, что в каждый последующий год сумма вклада увеличивается на $r\%$ по сравнению с предыдущим) через 4 года сумма вклада стала больше, чем сумма первоначального вклада, увеличенная в 4 раза.

Решение. Пусть K — сумма вклада. Тогда по формуле сложных процентов при ставке годовых $r\%$ через 4 года сумма вклада будет составлять $K \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^4$. По условию $K \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^4 > 4 \cdot K$. Отсюда $\left(1 + \frac{r}{100}\right)^4 > 4$. Решаем неравенство $\left(1 + \frac{r}{100}\right)^4 - 4 > 0$, $\left(\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 - 2\right) \cdot \left(\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 + 2\right) > 0$. Так как $\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 + 2 > 0$ при любом r, то неравенство равносильно неравенству $\left(1+\frac{r}{100}\right)^2-2>0$,

$1+2\cdot\frac{r}{100}+\frac{r^2}{100^2}-2>0$, $r^2+200r-10\,000>0$.

Неравенство выполняется при $r < -100-\sqrt{20\,000}$ и $r > -100+\sqrt{20\,000}$. Так как $r > 0$, то неравенство выполняется при $r > -100+\sqrt{20\,000}$.

Заметим, что $140^2 = 19\,600$, $141^2 = 19\,881$, $142^2 = 20\,164$. Поэтому $141 < \sqrt{20\,000} < 142$; $41 < -100+\sqrt{20\,000} < 42$. Так как $r > -100+\sqrt{20\,000}$, то наименьшее целое число, удовлетворяющее этому неравенству, равно 42.

Ответ: 42.

Пример 29. В 2012 году Иван Терентьевич открыл вклад в банке под 15% годовых (это значит, что сумма вклада, имеющаяся на его счету, каждый год 31 мая увеличивается на 15%). Каждый год, начиная с 2013 года, 1 июня Иван Терентьевич добавлял к своему вкладу сумму, равную первоначальному взносу в 2012 году. Какую сумму ежегодно вкладывал Иван Терентьевич, если в конце дня 31 мая 2015 года на его счету оказалось 63 894 рубля?

Решение. Обозначим через x ту сумму, которую ежегодно вкладывал в банк Иван Терентьевич. Тогда по условию в конце дня 31 мая 2015 года сумма вклада будет равна

$$\left(\left(x\left(1+\frac{15}{100}\right)+x\right)\cdot\left(1+\frac{15}{100}\right)+x\right)\cdot\left(1+\frac{15}{100}\right). \qquad (*)$$

Так как $\left(1+\frac{15}{100}\right)=\frac{23}{20}$, то, преобразуя выражение $(*)$, получаем

$$x\cdot\left(\frac{23}{20}\right)^3+x\cdot\left(\frac{23}{20}\right)^2+x\cdot\frac{23}{20}=x\cdot\left(\left(\frac{23}{20}\right)^3+\left(\frac{23}{20}\right)^2+\frac{23}{20}\right)=x\cdot\frac{31\,947}{20^3}.$$

Согласно условию, получаем уравнение $x\cdot\frac{31\,947}{20^3} = 63\ 894$. Отсюда

$$x=\frac{63\,894\cdot 20^3}{31\,947}=2\cdot 20^3=16\,000.$$

Ответ: 16 000 рублей.

Задачи для самостоятельного решения

66. Николай Сергеевич положил в банк 50 000 рублей под 20 % годовых. В конце каждого года банк начисляет 20% годовых, то есть увеличивает вклад на 20%. Сколько денег окажется на вкладе через 3 года?

67. В банк был помещён вклад под некоторый процент. Клиент через 4 года снял проценты по вкладу и израсходовал 25% своей прибыли на приобретение мебели, 10% оставшихся денег — на подарки родственникам, 31 500 рублей — на обновление гардероба. После всех этих расходов у него осталось 15% прибыли. Сколько рублей составила прибыль?

68. Анатолий Дмитриевич положил в банк 2 000 000 рублей под 15% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на имеющуюся сумму вклада (то есть увеличивает сумму на 15%). После двух лет банк уменьшил процент с 15% до 8%. Сколько всего лет должен пролежать вклад, чтобы он увеличился по сравнению с первоначальным на 1 085 128 рублей (при условии, что процент изменяться больше не будет)?

69. Иван Михайлович положил 9000 рублей в банк «Достояние». По истечении года к его вкладу были причислены процентные деньги, и, помимо этого, он увеличил свой вклад на 1280 рублей. Ещё через год (после очередного начисления процентов) он решил снять 1600 рублей, а остальные 10 280 рублей положил на новый срок. Чему равна процентная ставка в этом банке?

70. Людмила Николаевна положила 15 000 руб. в сберегательный банк с хорошей процентной ставкой. По истечении года к её вкладу были причислены процентные деньги, но в то же время ей понадобилось снять на необходимые нужды 1500 руб. Ещё через год она решила снять 2500 рублей, а остальные 14 000 рублей оставила в банке на следующий год. Чему равна процентная ставка в этом банке? В ответе укажите число процентов.

71. Вкладчик внёс в банк 500 000 рублей под 20% годовых. В конце каждого из первых трёх лет после начисления процентов он снимал одну и ту же сумму. К концу четвёртого года его вклад стал равным 927 600 руб. Какую сумму снимал вкладчик в течение каждого из первых трёх лет?

72. В банк помещён вклад 200 000 рублей под 20% годовых. В конце каждого из первых трёх лет (после начисления процентов) вкладчик дополнительно клал на счёт одну и ту же фиксированную сумму. К концу четвёртого года после начисления процентов оказалось, что он составляет 589 440 рублей. Какую сумму (в рублях) ежегодно добавлял вкладчик?

73. В 2011 году, 1 июня, Сергей Соколов открыл вклад в банке под 25% годовых (это значит, что сумма вклада, имеющаяся в банке в конце дня 31 мая последующего года, 1 июня увеличивается на 25%). Каждый год, начиная с 2012 года, 2 июня он добавлял к своему вкладу сумму, равную первоначальному взносу в 2011 году. Какую сумму ежегодно вкладывал Сергей Соколов, если 1 июня 2015 года на его счету оказалось 369 000 рублей?

74. В 2011 году, 1 июня, Роман Викторович открыл вклад в банке под 25% годовых (это значит, что сумма вклада, имеющаяся в банке в конце дня 31 мая последующего года, 1 июня увеличивается на 25%). Каждый год, начиная с 2012 года, 1 июля он добавлял к своему вкладу сумму, равную первоначальному взносу в 2011 году. Какую сумму ежегодно вкладывал Роман Викторович, если 2 июля 2015 года на его счету оказалось 2 306 250 рублей?

75. Семён несколько лет назад открыл вклад в некотором банке. Ежегодно он получал процент по вкладу — сначала 40% в год, затем $14\frac{2}{7}\%$ в год и, наконец, 12,5% в год, проценты в конце каждого года прибавлялись к сумме вклада. Известно, что одинаковые процентные ставки были равное число лет, а в конце первоначальная сумма его вклада увеличилась на 483,2%. Определите срок хранения вклада.

76. Игорь Викторович положил некоторую сумму в банк под 10% годовых (в конце каждого года сумма вкладов увеличивается на 10%). Может ли через некоторое число лет сумма вклада увеличиться в два раза?

77. Вкладчик положил в банк некоторую сумму. Укажите такое наименьшее целое значение r, для которого при ставке годовых $r\%$ (это значит, что в каждый последующий год сумма вклада увеличивается на $r\%$ по сравнению с предыдущим) через 4 года сумма вклада не менее чем в 2 раза будет превышать первоначальную сумму вклада.

4. Производственные и бытовые задачи

В повседневной жизни, быту и на производстве постоянно возникают самые разнообразные и неожиданные задачи, решение которых требует определённой математической подготовки. Как правило, для решения задач данной главы достаточно владеть знаниями, умениями и навыками, полученными в основной школе:
— составлять уравнения и неравенства в соответствии с условием задачи;
— решать линейные и квадратичные уравнения и неравенства, их простейшие системы;
— знать и применять свойства делимости целых чисел;
— производить преобразования числовых и буквенных выражений без помощи калькулятора и другой вычислительной техники.

Примеры решения различных производственных и бытовых задач

Пример 30. Сотрудник фирмы получил три технических задания, одинаковых по объёму требуемого. На выполнение первого и третьего из них он потратил 6 часов 28 минут, а второго и третьего — 5 часов 56 минут. Оказалось также, что второе задание он выполнял со скоростью, как первое и третье в среднем. За какое время были выполнены все 3 задания?

Решение. Обозначим через x, y и z время (в минутах), которое было потрачено на выполнение первого, второго и третьего заданий соответственно. Учитывая, что 6 часов 28 минут $=$ 388 минут, 5 часов 56 минут $=$ 356 минут, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x+z=388, \\ y+z=356, \\ y=\dfrac{x+z}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x+z=388, \\ y+z=356, \\ x+z=2y. \end{cases}$$

Тогда из первого и третьего уравнений системы получим $2y = 388$ и $y = 194$. Время (в минутах), затраченное на выполнение всех трёх заданий, равно

$$x+y+z=(x+z)+y=2y+y=3\cdot y=582.$$

В заключение отметим, что 582 минуты $=$ 9 часов 42 минуты.

Ответ: 9 часов 42 минуты.

Пример 31. Владелец магазина купил оптом некоторое количество мониторов и продал их в течение марта в розницу, получив прибыль 40 000 рублей. На все вырученные деньги он снова купил мониторы по той же оптовой цене и продал по той же розничной цене, что была в марте, получив на 48 000 рублей больше, чем потратил. Сколько денег он потратил на первую покупку?

Решение. Введём обозначения. Пусть первоначально владелец магазина купил n мониторов по цене x рублей, а продал их в марте по цене y рублей.

По условию прибыль составила $n(y-x) = 40\,000$ рублей. На вырученные деньги предприниматель купил $\frac{ny}{x}$ мониторов и получил $\frac{ny}{x}(y-x)$ рублей прибыли, что по условию составило 48 000 рублей. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} n(y-x) = 40\,000 \\ \frac{ny}{x}(y-x) = 48\,000. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим $\frac{y}{x} = 1{,}2$.

Подставив выражение $y = 1{,}2x$ в первое уравнение системы, придём к равенству

$$n(1{,}2x - x) = 40\,000;\ 0{,}2nx = 40\,000;\ nx = 200\,000.$$

На первую покупку предприниматель потратил 200 000 рублей.

Ответ: 200 000 рублей.

Пример 32. Для перевозки большого числа бочек по 160 кг и 210 кг выделены трёхтонные машины. Можно ли загрузить такими бочками машину полностью? Если можно, то укажите все варианты того, сколько бочек каждого вида при этом нужно взять.

Решение.

1-й способ

Предположим, что требуемое возможно. Заметим, что 3 тонны — это 3000 килограммов. Рассмотрим ситуацию, когда машина уже заполнена соответствующим образом.

Обозначим количество 160-килограммовых бочек через k, а количество 210-килограммовых — через n. При этом $k,\ n \geqslant 0$ — целые числа. Тогда $160k + 210n = 3000$. Сократим обе части этого уравнения на 10, получим $16k + 21n = 300$. Ясно, что $21n \leqslant 300$ (иначе $16k + 21n \geqslant 21n > 300$). Таким образом, $n \leqslant 14\frac{2}{7}$; $n \leqslant 14$, так как n — целое. Перебирая все целые значения n от 0 до 14, отберём те, для которых $k = \dfrac{300 - 21n}{16}$ тоже является целым числом. Получим единственное $n = 12$, при котором $k = 3$. (При использовании на экзамене подобного способа решения следует подробно рассматривать все шаги перебора.)

2-й способ

Как и в предыдущем способе решения, предположим, что требуемое возможно, и рассмотрим ситуацию, когда машина уже заполнена соответствующим образом.

Обозначим количество 160-килограммовых бочек через k, а количество 210-килограммовых — через n. При этом $k,\ n \geqslant 0$ — целые числа. Тогда $160k + 210n = 3000$ и $16k + 21n = 300$, откуда $n \leqslant 14$. Ясно, что $21n = 300 - 16k = 4(75 - 4k)$, откуда $21n$ должно делиться на 4 и не должно делиться на 8 (так $75 - 4k$ — нечётное число). Значит, либо $n = 4$, либо $n = 12$.

При $n = 4$ получим $16k = 300 - 84$, $k = \dfrac{27}{2}$ — не является целым.

При $n = 12$ получим $16k = 300 - 12 \cdot 21$, $k = 3$ — является целым. Значит, $n = 12$, $k = 3$.

Ответ: Да, 12 по 210 кг и 3 по 160 кг.

Пример 33. В фирме «Звезда и спичка» более 48 сотрудников, которые распределены по отделам «А» и «Б». Если число сотрудников отдела «Б» увеличить на 12, то оно более чем в два раза превысит число сотрудников отдела «А». Если число сотрудников отдела «Б» увеличить втрое, то оно превысит удвоенное количество сотрудников отдела «А», но не более чем на 47. Найдите возможное количество сотрудников фирмы «Звезда и спичка».

Решение. Пусть в отделе «А» работает k сотрудников, а в отделе «Б» — m сотрудников. Тогда, согласно первому предложению условия, $k + m > 48$. Утверждение „Если число сотрудников отдела «Б» увеличить на 12, то оно более чем в два раза превысит число сотрудников отдела «А»“ во введённых обозначениях примет вид $m + 12 > 2k$. Наконец, утверждение „Если число сотрудников отдела «Б» увеличить втрое, то оно превысит удвоенное количество сотрудников отдела «А», но не более чем на 47", запишем в виде $0 < 3m - 2k \leqslant 47$. Таким образом, мы пришли к системе $\begin{cases} k + m > 48, \\ 2k - m < 12, \\ 3m - 2k > 0, \\ 3m - 2k \leqslant 47. \end{cases}$

Из первого неравенства этой системы следует, что $k > 48 - m$, а из второго, что $k < 6 + \frac{m}{2}$. Отсюда $6 + \frac{m}{2} > 48 - m$ и $m > 28$.

Из четвёртого неравенства системы $2k \geqslant 3m - 47$, $k \geqslant \frac{3m}{2} - 23{,}5$.

Следовательно, $6 + \frac{m}{2} > \frac{3m}{2} - 23{,}5$ и, значит, $m < 29{,}5$.

Таким образом, $m = 29$.

При $m = 29$ получаем $\begin{cases} k + 29 > 48, \\ 2k - 29 < 12, \\ 3 \cdot 29 - 2k > 0, \\ 3 \cdot 29 - 2k \leqslant 47; \end{cases}$ $\begin{cases} k > 19, \\ k < 20{,}5, \\ k < 43{,}5, \\ k \geqslant 20; \end{cases}$ $k = 20$.

Следовательно, количество сотрудников $k + m = 20 + 29 = 49$.

Ответ: 49.

Пример 34. В автомастерской за лето починили 40 автомобилей трёх типов: легковые, грузовые и микроавтобусы. Легковых починили больше, чем микроавтобусов. Грузовых автомобилей починили в 12 раз больше, чем легковых. Сколько микроавтобусов починили за лето в автомастерской?

Решение. Допустим, за лето в автомастерской починили L легковых автомобилей, G грузовиков и M микроавтобусов. По смыслу задачи L, G, M — целые числа, причём $L > 0$, $G > 0$ и $M > 0$.

Согласно условию, $G = 12L$; $L > M$; $G + L + M = 40$. Но тогда $12L + L + M = 40$ и, следовательно, $13L < 40$, откуда $L \leqslant 3$.

При $L = 1$ из формулы $13L + M = 40$ получим $M = 27$, и неравенство $L > M$ не выполняется.

При $L = 2$ из формулы $13L + M = 40$ получим $M = 14$, и неравенство $L > M$ не выполняется.

При $L = 3$ из формулы $13L + M = 40$ получим $M = 1$, и неравенство $L > M$ выполняется.

Таким образом, за лето был отремонтирован 1 микроавтобус.

Ответ: 1.

Пример 35. Цена производителя на некоторое изделие составляет 25 рублей. Прежде чем попасть на прилавок магазина, изделие проходит через несколько фирм-посредников, каждая из которых увеличивает цену в 1,5 или 2 раза, осуществляя услуги по хранению и транспортировке изделий. Магазин делает наценку 20%, после чего изделие поступает в продажу по цене 405 рублей. Сколько посредников было между магазином и производителем?

Решение. Магазин приобрёл товар у последнего посредника по цене $\frac{405}{1{,}2} = 337{,}5$ (рублей). Таким образом, за счёт посредников между производителем и магазином цена возросла в $\frac{337{,}5}{25} = 13{,}5$ раз.

Пусть k посредников увеличивали цену в 1,5 раза, n посредников — в 2 раза. Тогда $1{,}5^k \cdot 2^n = 13{,}5$, $\left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot 2^n = \frac{27}{2}$, откуда $3^k \cdot 2^{n-k} = 3^3 \cdot 2^{-1}$. Учитывая, что числа 3 и 2 взаимно простые, получаем, что $k = 3$, $n - k = -1$, то есть $k = 3$, $n = 2$. Отсюда общее число посредников между магазином и производителем равно $n + k = 5$.

Ответ: 5.

Пример 36. Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого первый вкладчик добавил ещё 4 млн рублей, в результате чего его доля в общем деле возросла на 0,06. А когда он добавил ещё 4 млн рублей, его доля возросла ещё на 0,02. Сколько денег ему нужно добавить, чтобы увеличить свою долю ещё на 0,03?

Решение. Пусть изначально суммарный вклад составлял y миллионов рублей, из них x миллионов рублей — первого вкладчика. Тогда его доля составляла $\frac{x}{y}$.

После того как первый добавил 4 млн рублей, суммарно вклад составил $y + 4$ млн рублей, из них $(x + 4)$ — первого вкладчика. Тогда его доля возросла до $\frac{x+4}{y+4}$. По условию $\frac{x+4}{y+4} - \frac{x}{y} = 0{,}06$, откуда $4(y - x) = 0{,}06y(y + 4)$.

Аналогично, после того как он снова добавил 4 млн рублей, общая сумма вклада стала равна $(y + 8)$ млн рублей, из них $(x + 8)$ — первого вкладчика. Тогда $\frac{x+8}{y+8}-\frac{x+4}{y+4}=0{,}02$, откуда $4(y-x)=0{,}02(y+4)(y+8)$. Таким образом, $0{,}06y(y+4)=0{,}02(y+4)(y+8)$, $6y=2(y+8)$, $y=4$.

Из условия $4(y-x)=0{,}06y(y+4)$ получим $4(4-x)=0{,}06\cdot 4\cdot(4+4)$, откуда $4-x=0{,}06\cdot 8$ и $x=3{,}52$. Если тот же вкладчик добавит ещё k млн рублей, то его доля составит $\frac{x+8+k}{y+8+k}$. При найденных значениях x и y решим относительно k уравнение $\frac{x+8+k}{y+8+k}-\frac{x+8}{y+8}=0{,}03$;

$\frac{11{,}52+k}{12+k}-\frac{11{,}52}{12}=0{,}03$; $\frac{11{,}52+k}{12+k}-0{,}96=0{,}03$;

$11{,}52+k=0{,}99(12+k)$; $11{,}52+k=11{,}88+0{,}99k$; $0{,}01k=0{,}36$; $k=36$.

Таким образом, для того чтобы достичь требуемого, вкладчик должен добавить 36 млн рублей.

Ответ: 36 000 000 рублей.

Задачи для самостоятельного решения

78. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p=800$ рублей за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v=200$ руб., постоянные расходы предприятия $f=900\,000$ рублей в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q)=q(p-v)-f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 120 000 рублей.

79. Цех сборки может выпускать 70 роботов-пылесосов и 65 поломоечных машин в день. Отдел технического контроля в день может проверить не более 110 изделий. Поломоечная машина в два с половиной раза дороже робота-пылесоса. Сколько роботов-пылесосов и поломоечных машин нужно выпускать в сутки, чтобы общая стоимость продукции была наибольшей и все изделия были проверены отделом технического контроля?

80. Переводчик при конструкторском бюро получил задание по переводу трёх равных по объёму текстов. На перевод первого и второго он потратил 4 часа 14 минут, а второго и третьего — 4 часа 26 минут. Оказалось также, что третье задание он выполнял со скоростью, как первое и второе в среднем. За какое время были выполнены все 3 перевода?

81. Сотрудник фирмы получил три технических задания, одинаковых по объёму требуемого. На выполнение первого и второго он потратил 3 часа 4 минуты, а первого и третьего — 2 часа 44 минуты. Оказалось также, что первое задание он выполнял со скоростью, как второе и третье в среднем. За какое время были выполнены все 3 задания?

82. Уставной капитал некоторой компании составлял 15 миллионов рублей. Егор добавил к уставному капиталу ещё 1 млн рублей, после чего его доля в уставном капитале возросла на $\frac{1}{40}$. Определите долю Егора в уставном капитале до этой операции.

83. Святополк и Григорий вложили деньги в общее дело. После этого Святополк добавил ещё 2 млн рублей, в результате чего его доля в общем деле возросла на 0,03. А когда он добавил ещё 3 млн рублей, его доля возросла ещё на 0,02. Сколько денег ему нужно добавить, чтобы увеличить свою долю ещё на 0,02?

84. Все магазины торговой сети «17 ламп» имеют одинаковый объём продаж за месяц. Если после реорганизации он возрастёт вдвое, а число магазинов увеличится на 6, то общий объём продаж станет больше в 3 раза. Определите число магазинов до реорганизации.

85. Заказ на 720 деталей первый рабочий выполняет на 2 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 12 деталей больше?

86. Предприниматель Егорцев закупил на ферме фрукты двух видов для последующей перепродажи. Фруктов первого вида было закуплено на 2400 рублей, а фруктов второго вида — на 1960 рублей. Сколько было куплено фруктов второго вида, если известно, что их было куплено на 5 кг больше, чем первого, по цене на 24 рубля меньше (за 1 кг)?

87. Предприниматель Чудов приобрёл два ящика с гвоздями двух видов соответственно. Суммарная стоимость гвоздей во втором ящике — 29 400 рублей, а в первом — на 6600 рублей больше. Определите массу гвоздей в первом ящике, если масса гвоздей в первом ящике на 5 килограмм меньше, а цена (за 1 килограмм) гвоздей в первом ящике на 360 рублей больше по сравнению с ценой гвоздей во втором ящике.

88. Проезд в маршрутном такси стоит 23 рубля. Петя отдал эту сумму (без сдачи), используя только монеты достоинством в 2 и 5 рублей. При этом всего он потратил 10 монет. Сколько двухрублёвых монет отдал Петя?

89. Первоначально фонд заработной платы фирмы «Фонарь у дома» составлял 2 100 000 рублей. После реорганизации штат сотрудников был увеличен на 3 человека, а фонд заработной платы возрос до 3 800 000 рублей, средняя годовая заработная плата (относительно всех сотрудников) стала больше на 80 000. Сколько человек было в штате фирмы до реорганизации?

90. Предприниматель Наживкин купил в Таганроге несколько мешков чеснока и продал их в Ростове-на-Дону, получив на 50 000 рублей больше, чем потратил. На все вырученные деньги он снова купил в Таганроге чеснок и затем продал его в Ростове-на-Дону. На этот раз прибыль составила 55 000 рублей. Сколько денег Наживкин потратил на первую покупку, если цены закупки и продажи мешка чеснока не изменились?

91. Известно, что фирма состоит из нескольких отделов, в каждом из которых ровно 13 человек, причём каждый сотрудник относится только к одному отделу. Известно, что средняя заработная плата в месяц не меньше 24 000 рублей, а общая численность организации составляет не менее 95 человек. Определите точное число сотрудников, если фонд заработной платы за месяц составляет 2 640 000 рублей.

92. Для перевозки риса имеются мешки двух видов: на 60 кг и на 80 кг. Необходимо набрать одну тонну риса таким образом, чтобы все взятые мешки были полными. Какое наименьшее количество мешков при этом может понадобиться?

93. Проезд в маршрутном такси стоит 29 рублей. Игорь заплатил без сдачи, используя только монеты достоинством в 2 и 5 рублей, при этом двухрублёвых монет было отдано больше, чем пятирублёвых. Сколько всего монет отсчитал Игорь?

94. Татьяне необходимо оплатить стоимость учебного пособия по решению математических заданий с экономическим содержанием, которое стоит 87 рублей. У неё имеются только монеты достоинством 10 рублей, 5 рублей и 2 рубля. При оплате без сдачи она отсчитала 11 монет. Сколько пятирублёвых монет израсходовала Татьяна?

95. Предприниматель взял в аренду на 3 года помещение на условиях ежегодной платы в конце года в размере 150 000 рублей. Имея некоторый первоначальный капитал, он утроил его в течение года и за счёт него оплачивал аренду. Во второй и третий год он удваивал капитал и в конце года платил аренду. В результате после третьей оплаты аренды предприниматель имел капитал, в два раза больший первоначального. Определите первоначальный капитал.

96. На складе канцелярских товаров торговой сети «Кляксимэн» 200 коробок карандашей разложили по 40 ящикам, среди которых были ящики разной вместимости: по 2 коробки, по 8 коробок и по 24 коробки. Сколько окажется ящиков вместимостью 8 коробок, если все ящики заполнены полностью?

97. В корпусе заводоуправления на каждом этаже находится одинаковое количество комнат. Всего в корпусе 96 комнат, площадь каждой из них равна 46 м^2. При ремонте корпуса суммарные затраты на озеленение, отделочные работы и офисное оборудование были менее 1 263 600 руб., причём на отделочные работы было израсходовано по 27 600 руб. на каждый этаж корпуса, на оборудование комнат по 10 000 руб. на каждую комнату и на озеленение прилегающей территории по 35 руб. на 1 м^2 земельного участка. Известно, что площадь всех комнат одного этажа в 5 раз меньше площади прилегающей территории. Сколько этажей в корпусе?

98. В магазин поступила тонна фруктов: яблоки в ящиках по 48 кг, бананы в ящиках по 20 кг, виноград в коробках по 14 кг и персики в коробках по 10 кг (все ящики и коробки загружены полностью). При этом яблок поступило в два раза больше, чем бананов, а персиков столько же, сколько винограда. Сколько килограммов персиков поступило в магазин?

99. На острове Невезения цена производителя на товар A составляет 20 рублей. Прежде чем попасть на прилавок магазина, товар проходит через несколько фирм-посредников, каждая из которых увеличивает текущую цену в 4 раза или 5 раз, осуществляя услуги по хранению, транспортировке и охране товара. После этого магазин делает наценку 80% от цены, по которой он приобрёл товар у последнего посредника. В результате всех этих операций покупатель приобрёл товар за 57 600 рублей. Сколько посредников было между покупателем и производителем?

100. Производительность первого цеха завода определяется некоторым фиксированным числом аудиоплееров в сутки. Известно, что это число не превосходит 910. Производительность второго цеха завода до реконструкции составляла 0,85 от производительности первого цеха. После реконструкции второй цех увеличил производительность на 40% и стал выпускать более 960 аудиоплееров в сутки. Найдите, сколько аудиоплееров в сутки стал выпускать второй цех после реконструкции, если каждый цех и до, и после реконструкции выпускал целое число аудиоплееров.

101. Как набрать сумму в 250 рублей пятирублёвыми, двухрублёвыми и однорублёвыми монетами так, чтобы двухрублёвых монет было в десять раз меньше однорублёвых, однорублёвых монет было больше ста семидесяти, а остальные были пятирублёвыми? Укажите, сколько при этом понадобится пятирублёвых монет.

102. На некотором заводе за месяц произвели 50 вертолётов трёх марок: «А», «Б» и «В». При этом количество вертолётов марки «В» не превысило количества вертолётов марки «А». Количество вертолётов марки «Б» в 8 раз больше количества вертолётов марки «А». Сколько было произведено вертолётов марки «В»?

103. Для обеспечения сырьём консервной линии фермер высадил кусты хрена и сельдерея. Количество кустов хрена превышает количество кустов сельдерея менее чем на 4. Если число кустов сельдерея увеличить на 42, то оно превысит число кустов хрена, но не более чем в три раза. Если число кустов сельдерея увеличить впятеро и прибавить удвоенное число кустов хрена, то результат не превысит 126. Найдите, сколько кустов хрена и сколько кустов сельдерея посадил фермер.

104. Сотрудники некоторого отдела некоторой фирмы решили купить новый холодильник, при этом каждый внёс одинаковую сумму. Однако в последний момент два человека отказались от его использования и, соответственно, покупки, и каждому из оставшихся пришлось добавить по 400 рублей. Сколько человек работает в данном отделе, если цена холодильника заключена в пределах от 11 000 до 14 500 рублей?

105. Строительная бригада состоит из бетонщиков и плотников. Средняя заработная плата бетонщиков составляет 47 600 рублей. При этом средняя заработная плата плотников — 43 600 рублей. Определите, сколько процентов рабочих строительной бригады являются бетонщиками, если средняя заработная плата в бригаде равна 45 000 рублей.

5. Задачи на нахождение экстремума

Решение различных экономических задач в формате ЕГЭ часто сводится к отысканию экстремальных (минимальных или максимальных) значений некоторой функции.

Нередко такими функциями являются линейная функция $y = px + q$ $(p \neq 0)$ или квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Понятно, что линейная функция принимает экстремальное значение на одном из концов промежутка, которому принадлежат значения x.

Если линейная функция рассматривается только на множестве целых чисел, то число из этого промежутка, при котором функция принимает наибольшее или наименьшее значение, будет ближайшим целым числом к тому концу промежутка, на котором она принимает соответствующее экстремальное значение. Это следует из того, что линейная функция является монотонно возрастающей или убывающей.

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает экстремальное значение при $x = -\frac{b}{2a}$. В случае, если требуется найти целое число, при котором квадратичная функция принимает экстремальное значение на множестве целых чисел, то таким числом будет ближайшее к $x = -\frac{b}{2a}$ целое число. Это следует из того, что график квадратичной функции симметричен относительно прямой $x = -\frac{b}{2a}$.

Если решение задачи сводится к отысканию экстремальных значений другой функции, то точки, в которых функция принимает экстремальные значения находятся с помощью производной или же специальными методами, которые выбираются в зависимости от условия задачи.

Примеры решения различных задач на нахождение экстремума

Пример 37. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 450 - 3p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наименьшую цену, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 10 800 тыс. руб. Ответ приведите в тысячах рублей.

Решение. Согласно условию, должно выполняться равенство $pq \geqslant 10\,800$, то есть $(450 - 3p)p \geqslant 10\,800$.

Сократив обе части неравенства на 3 и раскрыв скобки, получим

$$150p - p^2 \geqslant 3600; \ p^2 - 150p + 3600 \leqslant 0.$$

Найдём корни уравнения $p^2 - 150p + 3600 = 0$:

$$p_{1,2} = \frac{150 \pm \sqrt{22\,500 - 14\,400}}{2} = \frac{150 \pm \sqrt{8100}}{2} = \frac{150 \pm 90}{2},$$

$$p_1 = 30, \ p_2 = 120.$$

Неравенство примет вид

$$(p - 30)(p - 120) \leqslant 0$$

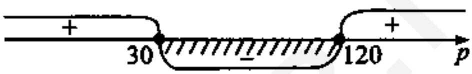

Рис. 1.

Решением рассматриваемого неравенства (см. рис. 1) будет отрезок $[30; \ 120]$ и потому наименьшее подходящее значение p равно 30.

Ответ: 30.

Пример 38. Небольшой благотворительный фонд приобрёл ценные бумаги на сумму 10 млн рублей. Их стоимость в конце каждого k-го года ($k = 1, \ 2, \ 3, \ldots$) после года приобретения бумаг становится равной $10 + k^2$ млн рублей. Однако есть возможность в конце каждого года, последующего за годом приобретения ценных бумаг, продать их и вырученные деньги вложить в банк под 18% годовых (это означает, что в конце каждого года хранения денег в банке их сумма увеличивается на 18%). В конце какого года, последующего за годом приобретения ценных бумаг, их надо продать и вложить в банк вырученные деньги, чтобы через 28 лет после года приобретения ценных бумаг на банковском счёту оказалась наибольшая сумма?

Решение. Пусть k ($k \in N$) — порядковый номер последнего года сохранения ценных бумаг не в банке. Тогда по условию и формуле сложных процентов через 28 лет после года приобретения ценных бумаг на банковском счёту будет $f(k) = (10 + k^2) \cdot (1{,}18)^{28-k}$ млн рублей.

Найдём теперь, при каком значении k ($k \in N, \ 1 \leqslant k \leqslant 28$) функция $f(k) = (10 + k^2) \cdot (1{,}18)^{28-k}$ принимает наибольшее значение.

Решим неравенство

$$f(k+1) \geqslant f(k) \qquad (1)$$

на множестве натуральных чисел.

$(10+(k+1)^2)\cdot(1{,}18)^{27-k} \geqslant (10+k^2)\cdot(1{,}18)^{28-k}$. Разделим обе части на положительное число $(1{,}18)^{27-k}$, получим равносильное неравенство $10+(k+1)^2 \geqslant (10+k^2)\cdot 1{,}18$.

$-0{,}18k^2+2k-0{,}8 \geqslant 0$; $18k^2-200k+80 \leqslant 0$; $9k^2-100k+40 \leqslant 0$.

Корнями квадратного трёхчлена $9k^2 - 100k + 40$ являются числа $\dfrac{50-\sqrt{2140}}{9}$ и $\dfrac{50+\sqrt{2140}}{9}$, а решением неравенства $9k^2 - 100k + 40 \leqslant 0$ будет промежуток $\left[\dfrac{50-\sqrt{2140}}{9};\ \dfrac{50+\sqrt{2140}}{9}\right]$.

Заметим, что $46 < \sqrt{2140} < 47$, поэтому $0 < \dfrac{50-\sqrt{2140}}{9} < 1$, а $10 < \dfrac{50+\sqrt{2140}}{9} < 11$. Натуральными числами, являющимися решениями неравенства (1), будут числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Значит, $f(1) \leqslant f(2) \leqslant f(3) \leqslant \ldots \leqslant f(7) \leqslant f(8) \leqslant f(9) \leqslant f(10) \leqslant f(11)$. Кроме того, $f(11) > f(12) > f(13) > \ldots > f(27) > f(28)$.

Действительно, если, например, выполнялось бы $f(16) \leqslant f(17)$, то число 16 было бы решением неравенства (1), что неверно. Таким образом, $f(11)$ является наибольшим значением функции, а число 11 — искомым.

Ответ: 11.

Пример 39. Для перевозки 500 маленьких и 26 больших блоков был выделен автомобиль грузоподъёмностью 9,75 т. По техническим условиям он может перевозить не более 38 маленьких блоков. Согласно габаритам блоков, перевозка одного большого блока приравнивается к перевозке 18 маленьких. Большой блок весит 3,5 т, а маленький 0,25 т. Какое минимальное число перевозок потребуется для перевозки всех блоков?

Решение. Так как необходимо найти минимальное число перевозок, то каждый автомобиль нельзя перегружать, но размещать в нём надо максимальное число блоков в соответствии с техническими условиями.

Обозначим через x число перевозок с одним большим блоком. Так как вес одного большого блока равен 3,5 т, то по весу можно было бы догрузить ещё 6,25 т. Но перевозка одного большого блока, согласно габаритам блоков, приравнивается к перевозке 18 маленьких. Поэтому больше 20 маленьких догрузить нельзя. Если догрузить ровно 20 маленьких блоков, то общий вес будет $1 \cdot 3{,}5 + 20 \cdot 0{,}25 = 8{,}5$ (т). Значит, перегруза не будет.

Обозначим через y число перевозок с двумя большими блоками. Их перевозка приравнивается (по габаритам) к перевозке 36 маленьких. Общий вес больших блоков 7 т, поэтому догрузив 2 маленьких блока (больше нельзя) получим общий вес загрузки $2 \cdot 3{,}5 + 2 \cdot 0{,}25 = 7{,}5$ (т). Значит, перегруза не будет.

Больше двух больших блоков поместить в автомобиль нельзя.

Так как общее число больших блоков равно 26, то $x + 2y = 26$, $x = 26 - 2y$.

При перевозках с большими блоками будет перевезено $20x + 2y$ маленьких блоков. Значит, для подсчёта числа перевозок оставшихся $500 - 20x - 2y$ маленьких блоков надо разделить $500 - 20x - 2y$ на 38. Но $\dfrac{500 - 20x - 2y}{38} = \dfrac{500 - 20 \cdot (26 - 2y) - 2y}{38} = \dfrac{-20 + 38y}{38} = y - \dfrac{20}{38}$.

Поэтому для подсчёта числа всех перевозок надо рассматривать число $x + y + y - \dfrac{20}{38} = x + 2y - \dfrac{20}{38} = 26 - \dfrac{20}{38} = 25\dfrac{18}{38}$. Так как число перевозок является натуральным числом, а наименьшее натуральное число, большее чем $25\dfrac{18}{38}$, равно 26, то понадобится 26 перевозок. Например, 24 перевозки с одним большим, одна перевозка с двумя большими и одна только с 18 маленькими блоками.

Ответ: 26.

Пример 40. Нужно перевезти по железной дороге 7 больших и 90 маленьких ящиков. Грузоподъёмность каждого вагона — 80 тонн. При этом каждый вагон может вместить не более 30 маленьких ящиков, каждый из которых весит 2 тонны. Большой ящик занимает место 7 маленьких ящиков и весит 27 тонн. Найдите минимальное число вагонов, необходимое для перевозки грузов.

Решение. Найдём общий вес грузов, которые нужно перевезти:

$$7 \cdot 27 + 90 \cdot 2 = 189 + 180 = 369 \text{ (тонн)}.$$

Это означает, что потребуется не менее 5 вагонов (4 вагона смогут перевезти только 320 тонн грузов).

Покажем, что 5 вагонов окажется достаточно. Так как большой ящик весит 27 тонн, то в один вагон можно погрузить максимум 2 больших ящика ($27 \cdot 3 = 81 > 80$). Если в вагон погрузить два больших ящика, то в нём ещё хватит места для $(80 - 27 \cdot 2) : 2 = 13$ маленьких ящиков. При этом будет соблюдено условие, согласно которому каждый вагон вмещает не более 30 маленьких ящиков, а каждый большой ящик занимает место 7 маленьких, так как $2 \cdot 7 + 13 = 27 < 30$.

Если в вагон погрузить один большой ящик, то в него по грузоподъёмности можно поместить ещё целую часть от отношения $(80 - 27) : 2$ малéньких ящиков, то есть 26, однако общий объём, который займут все ящики вместе, будет превышать допустимый, поскольку $7 + 26 = 33 > 30$. Значит, при одном большом ящике на оставшееся место можно погрузить только 23 маленьких ящика.

Итак, погрузим в первые 3 вагона по 2 больших и 13 маленьких ящиков, в четвёртый вагон — 1 большой ящик и 23 маленьких, в пятый вагон — 28 маленьких ящиков. $3 \cdot 2 + 1 = 7$; $3 \cdot 13 + 23 + 28 = 90$. Все условия задачи выполнены.

Ответ: 5.

Пример 41. В офисном строении находится 8 этажей, на каждом из которых, кроме первого, находится кабинет начальника отдела. Управляющая жилищная компания объявила, что в день профилактического ремонта лифта он сделает всего один подъём, подняв сразу всех начальников отделов на один, указанный ими этаж. После подъёма начальники будут вынуждены идти в свои кабинеты по лестнице.

В качестве компенсации за причинённые неудобства за каждый необходимый подъём на очередной этаж по лестнице каждому начальнику будет начислена сумма 200 рублей. За каждый аналогичный спуск — сумма 100 рублей. Этаж необходимо выбрать так, чтобы общая сумма компенсаций была минимальной. Укажите в рублях эту сумму.

Решение. Обозначим через k номер этажа, который соответствует условию задачи и указан начальниками. Тогда $2 \leqslant k \leqslant 8$, ровно один начальник окажется на своём k-м этаже, $(k-2)$ начальника будут спускаться по лестнице на свои этажи (так как ниже, чем k-й этаж, располагается $(k-1)$ этажей, притом на первом этаже нет ни одного начальника), $(8-k)$ начальников будут подниматься по лестнице на свои этажи.

Те, кто будут опускаться на свои этажи, совершат $1 + 2 + \ldots + (k-2)$ спусков, а те, кто будет подниматься, совершат $1+2+\ldots+(8-k)$ подъёмов (если $k = 8$, то полагаем сумму $1+2+\ldots+(8-k)$ равной 0; если же $k = 2$, то сумма $1 + 2 + \ldots + k - 2$ считается равной 0). Поэтому общая сумма компенсаций равна $100 \cdot (1+2+\ldots+(k-2)) + 200 \cdot (1+2+\ldots+(8-k)) =$

$$= \frac{100 \cdot (k-1) \cdot (k-2) + 200 \cdot (9-k) \cdot (8-k)}{2} =$$

$= 50 \cdot (k-1) \cdot (k-2) + 100 \cdot (9-k) \cdot (8-k) =$
$= 50k^2 - 150k + 100 + 7200 - 1700k + 100k^2 =$
$= 150k^2 - 1850k + 7300.$

Квадратичная функция $y = 150x^2 - 1850x + 7300$ принимает наименьшее значение при $x = \frac{1850}{300} = 6\frac{1}{6}$. Эта квадратичная функция симметрична относительно прямой $x = 6\frac{1}{6}$. Так как ближайшим целым числом к числу $6\frac{1}{6}$ является число 6, то $150k^2 - 1850k + 7300$ принимает наименьшее значение при $k = 6$. Отсюда получаем общую сумму компенсаций: $150 \cdot 6^2 - 1850 \cdot 6 + 7300 = 1600$ (рублей).

Ответ: 1600 рублей.

Пример 42. Цена бриллианта определённого качества массой m карат равна $m(m+1)$ денежных единиц. Бриллиант этого качества массой 24 карата разбился на две части, после чего его стоимость уменьшилась.
а) На сколько процентов от первоначальной стоимости уменьшилась стоимость бриллианта, если он разбился на части 16 и 8 карат?
б) На какое максимальное число процентов от первоначальной стоимости может уменьшиться цена упомянутого бриллианта при разбиении на две части?

Решение. а) Стоимость частей, на которые разбился бриллиант, равны $16 \cdot 17$ и $8 \cdot 9$ денежных единиц, а первоначальная стоимость бриллианта равна $24 \cdot 25$ денежных единиц.

Составим пропорцию
$24 \cdot 25 — 100\%$
$16 \cdot 17 + 8 \cdot 9 — y\%$
Отсюда $y = \frac{(16 \cdot 17 + 8 \cdot 9) \cdot 100}{24 \cdot 25} = \frac{16 \cdot 17 + 8 \cdot 9}{6} = \frac{272 + 72}{6} =$
$= \frac{344}{6} = 57\frac{1}{3}(\%)$.

Цена уменьшилась на $100 - 57\frac{1}{3} = 42\frac{2}{3}(\%)$.

б) Пусть x и $(24-x)$ — массы частей, на которые разбился бриллиант. Их стоимости соответственно равны: $x \cdot (x+1)$; $(24-x) \cdot (25-x)$ денежных единиц, а стоимость всего бриллианта равна $24 \cdot 25$ денежных единиц.

Составим пропорцию

$24 \cdot 25$ — 100%,

$x \cdot (x+1) + (24-x) \cdot (25-x)$ — $f(x)\%$.

Тогда $f(x) = \dfrac{(x \cdot (x+1) + (24-x) \cdot (25-x)) \cdot 100}{24 \cdot 25} =$

$$= \frac{(x^2 + x + 600 - 49x + x^2) \cdot 100}{24 \cdot 25} = \frac{2x^2 - 48x + 600}{6} = \frac{1}{3}x^2 - 8x + 100.$$

Максимальное уменьшение процентов будет при минимальном значении $f(x)$. Минимальное значение $f(x)$, как квадратного трёхчлена, будет при $x = \dfrac{8}{\left(\frac{2}{3}\right)} = 12$. $f(12) = \dfrac{1}{3} \cdot 12^2 - 8 \cdot 12 + 100 = 48 - 96 + 100 = 52$.

Значит, максимальное число процентов, на которое может уменьшиться цена бриллианта, будет $100 - 52 = 48(\%)$.

Ответ: а) $42\frac{2}{3}$; б) 48.

Пример 43. Соседи по дому Андрей и Михаил совершают воскресные пешие прогулки по живописному парку с оплачиваемой дорогой для пешеходов. Андрей входит в парк раньше Михаила и проходит 1 км. После этого в парк входит Михаил и идёт со скоростью на 3 км/ч больше, чем Андрей. Через некоторое время Михаил догоняет Андрея. В тот же момент они поворачивают обратно и со скоростью 3 км/ч одновременно выходят из парка.

а) При какой первоначальной скорости Андрея время его прогулки будет наименьшим?

б) Какую сумму придется заплатить при этом Андрею, если аренда дороги стоит 300 рублей за один час?

Решение. а) Пусть v (км/ч) — скорость ходьбы Андрея от момента входа до момента, когда его догоняет Михаил. Тогда скорость ходьбы Михаила от момента входа до момента, когда он догоняет Андрея, равна $v + 3$ (км/ч).

Пусть теперь t — время (в часах), в течение которого Михаил догоняет Андрея.

Согласно условию, получаем уравнение $(v+3) \cdot t = 1 + v \cdot t$,

$v \cdot t + 3t = 1 + v \cdot t$, $3t = 1$, $t = \dfrac{1}{3}$.

Отсюда следует, что расстояние от входа в парк до поворота равно $1 + \frac{1}{3}v$ (км), Андрей проходит его за $\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{3}\right)$ часов.

На обратном пути это расстояние Андрей и Михаил преодолевают за одно и то же время:

$$\frac{1 + \frac{1}{3}v}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}v.$$

Таким образом, время Андрея $t(v)$ на прохождение всего пути вычисляется по формуле $t(v) = \frac{1}{v} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}v = \frac{1}{v} + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}v.$

Находим точку минимума $t(v)$ с помощью производной.

$t'(v) = -\frac{1}{v^2} + \frac{1}{9}.$

$t'(v) = 0$ при $v = \pm 3$. Так как $v > 0$, то исследуем поведение $t(v)$ на промежутках $(0;\ 3)$ и $(3; +\infty)$.

$t'(1) = -\frac{8}{9}$, значит, на промежутке $(0;\ 3)$ функция $t(v)$ убывает.

$t'(4) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{9} > 0$, значит, на промежутке $(3;\ +\infty)$ функция $t(v)$ возрастает.

Отсюда следует, что при $v = 3$ будет минимальное значение $t(v)$.

б) $t(3) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{4}{3}.$

$300 \cdot \frac{4}{3} = 400$ (рублей).

Ответ: а) 3 км/ч; б) 400 рублей.

Пример 44. Индивидуальный предприниматель за 288 тысяч рублей приобрёл цех по производству носков. Затраты на изготовление x тысяч пар носков в месяц составляют $(x^2 + 6x + 7)$ тысяч рублей. Если продавать одну пару носков по c рублей, то прибыль от продажи x тысяч пар носков в месяц составит $cx - (x^2 + 6x + 7)$ тысяч рублей $(c > 6)$. Предприниматель имеет возможность изготавливать и продавать такое количество пар носков, которое обеспечивает наибольшую прибыль. При каком наименьшем значении c предприниматель окупит затраты на покупку цеха не более чем за 32 месяца?

Решение. По условию прибыль $P(x)$ от продажи x тысяч пар носков в месяц находится по формуле $P(x) = cx-(x^2+6x+7) = -x^2+(c-6)x-7$. Наибольшее значение квадратичная функция принимает при $x = \dfrac{c-6}{2}$.

$P\left(\dfrac{c-6}{2}\right) = -\left(\dfrac{c-6}{2}\right)^2 + (c-6)\dfrac{c-6}{2} - 7 = \dfrac{(c-6)^2}{4} - 7$. Так как надо окупить затраты не более чем за 32 месяца, то $32\left(\dfrac{(c-6)^2}{4} - 7\right) \geqslant 288$,

$\dfrac{(c-6)^2}{4} - 7 \geqslant 9$, $(c-6)^2 \geqslant 64$. Так как $c - 6 > 0$, то $c - 6 \geqslant 8$, $c \geqslant 14$. Наименьшее значение c равно 14.

Ответ: 14.

Пример 45. Крупный предприниматель является владельцем двух заводов, расположенных на противоположных берегах реки. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном на левом берегу, используются более современные технологии. В результате если рабочие на правом берегу трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $3t$ единиц товара. Если же рабочие на левом берегу трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $5t$ единиц товара. На обоих заводах за каждый час работы рабочему платят 300 рублей. Какую наименьшую сумму надо заплатить рабочим за неделю, чтобы произвести за эту неделю 340 единиц товара? Ответ укажите в рублях.

Решение. Пусть на правом берегу суммарное рабочее время за неделю равно x^2, а на левом берегу y^2 часов. Тогда, согласно условию задачи, рабочие произведут соответственно продукции $3x$ и $5y$ единиц продукции. Поэтому $3x + 5y = 340$. Отсюда получаем $y = \dfrac{340-3x}{5}$.

Согласно условию, за эту работу надо будет заплатить рабочим сумму $S = (x^2 + y^2) \cdot 300$. Из вышесказанного получаем:

$$S = S(x) = \left(x^2 + \left(\frac{340-3x}{5}\right)^2\right) \cdot 300 = \left(\frac{25x^2 + (340-3x)^2}{25}\right) \cdot 300 =$$
$$= (25x^2 + (340-3x)^2) \cdot 12 = 12 \cdot (34x^2 - 6 \cdot 340x + 340^2).$$

Последнее выражение будет принимать наименьшее значение в вершине параболы $y = 34x^2 - 6 \cdot 340x + 340^2$, то есть в точке $x_0 = -\dfrac{-6 \cdot 340}{2 \cdot 34} = 30$.

При этом

$$S(30) = \left(30^2 + \left(\frac{340 - 3 \cdot 30}{5}\right)^2\right) \cdot 300 = 1\,020\,000 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 1 020 000.

Пример 46. Крупный бизнесмен является владельцем двух заводов, выпускающих одинаковую продукцию. На втором заводе используется более современное оборудование, позволяющее за одинаковое время с первым заводом производить больше продукции, чем на первом заводе. Известно, что если рабочие первого завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $2t$ единиц товара. А если рабочие второго завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $5t$ единиц товара. На обоих заводах за каждый час работы рабочему платят 500 рублей. Какое наибольшее число единиц продукции можно будет выпустить на обоих заводах при условии, что заработную плату на предстоящую неделю можно будет выплатить в размере 1 450 000 рублей?

Решение. Пусть суммарное рабочее время за неделю на первом заводе равно x^2, а на втором заводе y^2 часов. Тогда, согласно условию задачи, на заводах произведут соответственно $2x$ и $5y$ единиц продукции, а суммарное количество будет $K = 2x+5y$ (единиц продукции). Согласно условию, за эту работу надо выплатить рабочим сумму $(x^2 + y^2) \cdot 500$ рублей. Так как есть возможность выплатить 1 450 000 рублей, то получаем уравнение: $(x^2 + y^2) \cdot 500 = 1\,450\,000$.

Отсюда $x^2 + y^2 = 2900$, $y^2 = 2900 - x^2$.

Таким образом, $K = K(x) = 2x + 5y = 2x + 5 \cdot \sqrt{2900 - x^2}$.

Найдём наименьшее значение $K(x)$ с помощью производной.

$$K'(x) = 2 - \frac{5 \cdot 2x}{2\sqrt{2900 - x^2}}.$$

$K'(x) = 0$, если $2 - \dfrac{5x}{\sqrt{2900 - x^2}} = 0$; $2\sqrt{2900 - x^2} = 5x$;

$4(2900 - x^2) = 25x^2$; $4 \cdot 2900 = 29x^2$; $x^2 = 400$; $x = 20$.

Заметим, что $K'(x) > 0$ при $x < 20$ и $K'(x) < 0$ при $x > 20$, поэтому в точке $x = 20$ будет наибольшее значение.

$y = \sqrt{2900 - 20^2} = 50$,

$K(20) = 2 \cdot 20 + 5 \cdot 50 = 290$ (единиц продукции).

Ответ: 290 единиц продукции.

Пример 47. Первичная информация некоторой фирмы распределяется по серверам 1 и 2. С сервера 1 при объёме ω^2 Гбайт входящей в него информации выходит 3ω Гбайт, а с сервера 2 при объёме ω^2 Гбайт входящей в него информации выходит 4ω Гбайт обработанной информации. Определите наибольший общий объём выходящей информации, если общий объём входящей информации равен 225 Гбайт.

Решение. Пусть на первый сервер входит x Гбайт, а на второй y Гбайт информации. По условию $x + y = 225$, $y = 225 - x$. Учитывая указанную в условии зависимость между объёмами входящей и выходящей информации для серверов 1 и 2, получаем, что объём выходящей информации будет равен $\Omega = \Omega(x) = 3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 3\sqrt{x} + 4 \cdot \sqrt{225 - x}$.
Найдём наибольшее значение $\Omega(x)$ с помощью производной.

$\Omega'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4}{2 \cdot \sqrt{225 - x}}$.

$\Omega'(x) = 0$, если $\dfrac{3}{\sqrt{x}} = \dfrac{4}{\sqrt{225 - x}}$, $\dfrac{9}{x} = \dfrac{16}{225 - x}$, $9 \cdot (225 - x) = 16x$, $9 \cdot 225 = 25x$, $x = 81$.
Заметим, что $\Omega'(x) > 0$ при $x < 81$ и $\Omega'(x) < 0$ при $x > 81$, поэтому в точке $x = 81$ будет наибольшее значение.
$\Omega(81) = 3 \cdot \sqrt{81} + 4 \cdot \sqrt{225 - 81} = 3 \cdot 9 + 4 \cdot 12 = 75$ (Гбайт).

Ответ: 75 Гбайт.

Пример 48. Зависимость объёма Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 12\,000 - P$, $2000 \leqslant P \leqslant 12\,000$. Доход от продажи товара составляет $P \cdot Q$ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $2500 \cdot Q + 1\,000\,000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 60%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Решение. Прибыль фирмы выражается следующей формулой:

$$f(P) = PQ - (2500Q + 1\,000\,000) = -P^2 + 14\,500P - 31\,000\,000,$$

то есть квадратично зависит от цены P. Пусть первоначальная цена равнялась P_0. После снижения на 60% цена стала равняться $0{,}4P_0$. Графиком функции $y = f(P)$ является парабола с ветвями, направленными вниз, поэтому наибольшее значение прибыль будет достигать в вершине параболы. Так как $f(P_0) = f(0{,}4P_0)$, вершина параболы будет находиться в точке $\frac{P_0 + 0{,}4P_0}{2} = 0{,}7P_0$. Это означает, что нужно увеличить цену товара с $0{,}4P_0$ до $0{,}7P_0$, то есть на $\frac{0{,}7P_0 - 0{,}4P_0}{0{,}4P_0} \cdot 100\% = 75\%$.

Ясно, что в вершине параболы $0{,}7P_0 = \frac{14\,500}{2} = 7250$, отсюда значения P_0; $0{,}4P_0$ и $0{,}7P_0$ удовлетворяют неравенству $2000 \leqslant P \leqslant 12\,000$.

Ответ: 75.

Задачи для самостоятельного решения

106. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 1450$ рублей за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 700$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 1\,200\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 1 500 000 руб.

107. Необходимо огородить забором участок прямоугольной формы площадью 10^4 м^2. Стоимость возведения забора длиной 1 м равна 500 рублей. Определите наименьшую возможную стоимость всего забора.

108. Михаил приобрёл ценную бумагу за 9000 рублей. Её стоимость в конце каждого года, последующего за годом покупки, возрастает на 2500 рублей. Однако в конце каждого года, последующего за годом покупки, Михаил может продать эту ценную бумагу и вложить вырученные деньги в банк под 15% годовых (это означает, что в конце каждого года хранения денег в банке их сумма увеличивается на 15%). В конце какого года, последующего за годом покупки, Михаил должен продать ценную бумагу и вложить деньги в банк, чтобы на банковском счёту через 28 лет после года приобретения была наибольшая сумма?

109. В пчелиной семье, зимующей в помещении, в день последней весенней подкормки было 9 тысяч пчёл. К концу k-го дня ($k = 1, 2, 3, \ldots$) после дня подкормки численность пчелиной семьи, зимующей в помещении, становится равной $9 + k^2 - k$ тысяч пчёл. Далее, при перевозке пчёл на летнюю стоянку, численность пчелиной семьи в каждый последующий день возрастает на 25% по сравнению с предыдущим днём. В конце какого дня после дня весенней подкормки нужно перевезти пчёл на летнюю стоянку, чтобы через 38 дней после подкормки численность пчелиной семьи стала наибольшей? Известно, что у фермера нет возможности поместить пчёл на летнюю стоянку сразу же после подкормки.

110. Фермерское хозяйство расположено в поле в 15 км от ближайшей точки прямолинейного шоссе. От фермерского хозяйства надо направить курьера в посёлок, расположенный по шоссе в 24 км от упомянутой точки. Курьер на вездеходе передвигается по полю со скоростью 30 км/ч, а по шоссе — со скоростью 78 км/ч. На каком расстоянии от посёлка расположена точка шоссе, на которую надо выехать курьеру, чтобы проехать путь за наименьшее время?

111. Первичная информация разделяется по серверам 1 и 2 и обрабатывается на них. С сервера 1 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $30t$ Гбайт, а с сервера 2 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $36t$ Гбайт обработанной информации; $15 \leqslant t \leqslant 65$. Каков наибольший общий объём выходящей информации при общем объёме входящей информации в 3904 Гбайт?

112. Олеся является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов суммарно трудятся t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Олеся платит рабочему 400 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 500 рублей. Олеся готова выделять 1 800 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее число деталей можно произвести за неделю на этих двух заводах?

113. Кристина владеет двумя промышленными заводами, выпускающими одинаковую продукцию. На втором заводе установлено современное оборудование, поэтому на нём может быть выпущено больше единиц продукции. Известно, что если рабочие первого завода суммарно трудятся t^2 часов в неделю, то выпускают $3t$ единиц продукции. А если рабочие второго завода суммарно трудятся t^2 часов в неделю, то выпускают $6t$ единиц продукции. Ставка заработной платы рабочего составляет 700 рублей за час. Кристина готова платить рабочим 42 350 000 рублей в неделю. На какое максимальное число единиц продукции она может рассчитывать?

114. Дарья является владельцем двух промышленных заводов, расположенных на противоположных берегах реки. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном на левом берегу, используется более современное оборудование. В результате если рабочие на правом берегу суммарно трудятся t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара, а рабочие на левом берегу, если суммарно трудятся t^2 часов в неделю, выпускают $10t$ единиц продукции. На обоих заводах за каждый час работы Дарья платит рабочему 400 рублей. Какую наименьшую сумму придётся тратить на оплату рабочим в неделю, чтобы производить 1 160 единиц товара в неделю?

115. Фермерскому хозяйству предлагается указать длину и ширину земельного участка прямоугольной формы, одна из сторон которого должна прилегать к шоссе. Нужно, чтобы площадь участка равнялась $17 \cdot 10^5$ м^2. Участок придётся огородить забором фиксированной высоты, причём один метр забора (в длину), прилегающий к шоссе, стоит 24 рубля, а один метр забора на трёх оставшихся сторонах стоит 10 рублей. Какими должны быть стороны участка, чтобы стоимость забора была минимальной?

116. Некоторый цех получил заказ на изготовление 6000 металлоконструкций типа A и 48 000 металлоконструкций типа B. Каждый из 200 рабочих цеха затрачивает на изготовление одной металлоконструкции типа A время, за которое он мог бы изготовить 3 металлоконструкции типа B. Каким образом следует разбить рабочих цеха на две бригады, чтобы минимизировать время, за которое обе бригады выполнят весь заказ, приступив к работе одновременно? При этом каждая бригада должна изготавливать металлоконструкции только одного типа.

117. В офисном строении находится 12 этажей, на каждом из которых, кроме первого, находится кабинет начальника отдела. Управляющая жилищная компания объявила, что в день профилактического ремонта лифт будет делать всего один подъём сразу всех начальников отделов на один, указанный ими этаж. После подъёма почти все начальники будут вынуждены идти в свои кабинеты по лестнице. В качестве компенсации за причинённые неудобства за каждый необходимый подъём на каждый очередной этаж по лестнице каждому начальнику будет начислена сумма 100 рублей. За каждый аналогичный спуск — сумма 50 рублей. Этаж необходимо выбрать так, чтобы сумма компенсаций была минимальной.

118. Цена бриллианта определённого качества массой m карат пропорциональна $(m^2 + 1)$. Бриллиант этого качества массой 3 карата разбился на две части, после чего его стоимость уменьшилась. На какое максимальное число процентов от первоначальной стоимости могла уменьшиться цена упомянутого бриллианта при разбиении на две части?

119. Затраты на строительство нового аквапарка составляют 50 млн рублей. Стоимость обслуживания x тысяч посетителей за сезон равна $0{,}25x^2 + 4x + 6$ млн рублей. Если за обслуживание одного посетителя за сезон брать c тысяч рублей ($c > 4$), то прибыль за обслуживание x тысяч посетителей за сезон будет равна $cx - (0{,}25x^2 + 4x + 6)$ млн рублей. По окончанию строительства у руководства аквапарка будет возможность организовать обслуживание такого числа посетителей, которое обеспечивает максимальную прибыль. При каком наименьшем значении c окупятся затраты на строительство аквапарка не более чем за 5 сезонов?

120. Зависимость объёма Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 17\,000 - P$, $3000 \leqslant P \leqslant 17\,000$. Доход от продажи товара составляет $P \cdot Q$ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $4000 \cdot Q + 3\,500\,000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 50%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

121. Для перевозки 400 маленьких и 24 больших блоков был выделен автомобиль грузоподъёмностью 7 т. Размеры ящиков таковы, что автомобиль может перевезти не более 34 маленьких блоков, а один большой блок занимает место 15 маленьких. При этом большой блок весит 3 т, а маленький 0,2 т. Какое минимальное число перевозок потребуется для транспортировки всех блоков?

122. Нужно перевезти по железной дороге 8 больших и 120 маленьких ящиков. Грузоподъёмность каждого вагона — 100 тонн. При этом каждый вагон может вместить не более 25 маленьких ящиков, каждый из которых весит 3 тонны. Большой ящик занимает место 5 маленьких ящиков и весит 35 тонн. Найдите минимальное число вагонов, необходимое для перевозки грузов.

Итоговые работы

Вариант 1

1. Цена телевизоров, не проданных в текущем году, уменьшается каждый последующий год на одно и то же число процентов от предыдущей цены. На сколько процентов за каждый год уменьшалась цена телевизоров, если, выставленный на продажу за 30 000 рублей, он через два года был продан за 21 168 рубля?

2. Бывшие профессиональные велосипедисты Иван и Пётр совершают длительные воскресные поездки по живописному парку с оплачиваемой трассой для велосипедистов. Иван въезжает в парк раньше Петра и проезжает 5 км. После этого в парк въезжает Пётр и едет со скоростью на 4 км/ч больше, чем Иван. Через некоторое время Пётр догоняет Ивана. В тот же момент они поворачивают обратно и со скоростью 16 км/ч одновременно выезжают из парка, заканчивая поездку.
а) При какой скорости Ивана время его поездки от въезда в парк до поворота назад будет наименьшим?
б) Какую сумму придётся заплатить при этом Ивану, если аренда велосипедной трассы стоит 128 рублей за один час?

3. 15 января был выдан кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг выражается в процентах от кредита.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Текущий долг	100%	85%	70%	55%	40%	25%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивается на 6%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

4. Вкладчик положил в банк некоторую сумму. Укажите такое наименьшее целое число r, чтобы при ставке годовых $r\%$ (это значит, что в каждый последующий год сумма вклада увеличивается на $r\%$ по сравнению с предыдущим значением) через 3 года сумма вклада стала больше, чем первоначальная сумма вклада, увеличенная в 1,5 раза.

5. На базе отдыха был приобретён водный мотоцикл за 49 600 рублей для катания отдыхающих по живописному озеру. Затраты на катание продолжительностью x минут составляют $x^2 + 5x + 8$ рублей. Если брать за 1 минуту катания c рублей ($c > 5$), то за катание x минут будет прибыль $cx - (x^2 + 5x + 8)$ рублей. На базе отдыха есть возможность организовать катание такого количества отдыхающих, которое обеспечивает наибольшую прибыль. При каком наименьшем значении c база отдыха окупит затраты на покупку водного мотоцикла не более чем за 200 минут катания?

Вариант 2

1. В течение двух лет цену на товар повышали дважды, каждый раз на $p\%$. На сколько процентов надо уменьшить образовавшуюся цену, чтобы получить такую же цену, какой она была два года назад?

2. В день подкормки рассады в теплице её высота была 3 см. В каждый последующий день после подкормки рассады её высота в теплице увеличивается на 0,5 см каждый день. При высадке рассады в грунт её высота увеличивается каждый день на 5% по сравнению с предыдущим днём. В конце какого дня после дня подкормки рассады в теплице её нужно высадить в грунт, чтобы в конце 35-го дня после подкормки высота рассады стала наибольшей?

3. В июле планируется взять кредит на сумму 4 880 000 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом прошлого года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года) по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

4. Николай Дмитриевич открыл 1 мая 2013 года вклад под 10% годовых (это значит, что каждый год сумма вклада, имеющаяся в банке в конце дня 30 апреля, увеличивалась на 10%). Каждый год, начиная с 2014, 2 мая Николай Дмитриевич добавлял к своему вкладу сумму, равную первоначальному вкладу. Какую сумму (в рублях) ежегодно вкладывал Николай Дмитриевич, если в 1 мая 2017 года на его счёту оказалось 204 204 рубля?

5. Зависимость объёма Q (в шт.) купленного на оптовой базе товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 20\ 000 - P$, $7000 \leqslant P \leqslant 18\ 000$. Доход от продажи товара составляет $P \cdot Q$ рублей. Затраты на организацию продажи Q единиц товара составляют $5000 \cdot Q + 7\ 000\ 000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на организацию его продажи. Стремясь привлечь внимание покупателей, руководство решило уменьшить стоимость товара на 20%, однако от этого прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Ответы

Ответы к диагностической работе

1. 33% (см. пример 3 главы «Проценты, доли, соотношения»).

2. 2% (см. пример 24 главы «Кредиты»).

3. 75 000 рублей (см. пример 26 главы «Вклады»).

4. 75 Гбайт (см. пример 47 главы «Задачи на нахождение экстремума»).

5. 315 человек (см. пример 15 главы «Проценты, доли, соотношения»).

Проценты, доли и соотношения

1. 62 400 рублей.

2. 78 300 рублей.

3. 102 510 книг.

4. 140 рублей.

5. на 1%.

6. на 54%.

7. 2 460 000 рублей.

8. на 24%.

9. на 30%.

10. 200%.

11. на $\frac{100 \cdot q}{100 - q}$%.

12. 14.

13. 6,6%.

14. на 251%.

15. на 400%.

16. 250 000 рублей.

17. на 216 000 долларов.

18. 42 000 велосипедов.

19. 4480 рублей.

20. на 25%.

21. 67 посещений.

22. 1 660 000 рублей.

23. 66%.

24. 70,8 рублей.

25. 2100 рублей.

26. 1000 рублей.

27. 28 000 рублей.

28. 114 000 рублей.

29. на 92%.

30. в 1,8 раз.

31. 75%.

32. 72 рубля.

33. 25%.

34. 1,2%

35. на 60%.

36. 950 100 рублей.

37. 720 человек.

38. 4 отдела.

Кредиты

39. 6840 рублей

40. а) 435 000 рублей; б) на 29%.

41. 285 000 рублей; б) на 28,5%.

42. на 6 месяцев.

43. на 4 года.

44. 1 322 500 рублей.

45. 4 300 000 рублей.

46. 2 662 000 рублей.

47. 843 600 рублей.

48. 30%.

49. 1 250 000 рублей.

50. 0,81 млн рублей.

51. под 12%.

52. под 10%.

53. на 15%.

54. на 27%.

55. на 12 лет.

56. 10 лет.

57. 5 лет.

58. 24.

59. 22.

60. 20,3 млн рублей.

61. 5,3 млн рублей.

62. 1,125 млн рублей.

63. на 25%.

64. 2.

65. 3.

Вклады

66. 86 400 рублей.

67. 60 000 рублей.

68. 4 года.

69. 8%.

70. 10%

71. 25 000 рублей.

72. 40 000 рублей.

73. 51 200 рублей.

74. 320 000 рублей.

75. 9 лет.

76. нет.

77. 19%.

Производственные и бытовые задачи

78. 1700 единиц продукции.

79. 45 роботов и 65 машин.

80. 6 часов 21 минута.

81. 4 часа 21 минута.

82. 0,6.

83. 9 000 000 рублей.

84. 12 магазинов.

85. 60 деталей.

86. 35 килограммов.

87. 30 килограммов.

88. 9 двухрублёвых монет.

89. 7 человек.

90. 500 000 рублей.

91. 104 сотрудника.

92. 13 мешков.

93. 10 монет или 13 монет.

94. 3 монеты.

95. 105 000 рублей.

96. 9 ящиков.

97. 6 этажей.

98. 140 килограммов.

99. 6 посредников.

100. 1071 аудиплеер.

101. 2 пятирублёвые монеты.

102. 5 вертолётов.

103. 20 кустов хрена и 17 — сельдерея.

104. 9 человек.

105. 35%.

Задачи на нахождение экстремума

106. 3600 шт.

107. 200 000 рублей.

108. в конце 4-го года.

109. в конце 8-го дня.

110. 17,75 км.

111. 2928 Гбайт.

112. 270 деталей.

113. 1650 единиц продукции.

114. 4 640 000 рублей.

115. 1000 м и 1700 м.

116. 55 и 145 рабочих.

117. 2000 рублей.

118. 35%.

119. 8.

120. 50%.

121. 23 перевозки.

122. 7 вагонов.

Ответы к итоговым работам

Вариант 1.

1. 16%.

2. а) 8 км/ч; б) 360 рублей.

3. 22,5%.

4. 15.

5. 37 рублей.

Вариант 2.

1. $\frac{100p \cdot (200+p)}{(100+p)^2}\%$.

2. в конце 15-го дня.

3. 1 152 000 рублей.

4. 40 000 рублей.

5. 12,5%.

Литература

[1] *Ткачук В. В.* Математика — абитуриенту. — 16-е изд., исправленное и дополненное. — М.: МЦНМО, 2012. — 960 с.

[2] *Ко́чович Е.* Финансовая математика: с задачами и решениями. — М.: Финансы и статистика, 2004. — 384 с.

[3] Математика. Подготовка к ЕГЭ-2016. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2015. — 352 с. (ЕГЭ)

[4] Математика. Подготовка к ЕГЭ-2015. Книга 2: учебно-методическое пособие/ Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2014. — 256 с. (Готовимся к ЕГЭ)

[5] *Алешковский И. А.* Математика в экономике: Экономико-математические задачи на проценты и доли: Пособие для поступающих на экономический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. — 3-е изд., испр., перераб. — М.: МАКС Пресс, 2006. — 80 с. (Серия «Абитуриенту МГУ»)

[6] *Пучков Н. П., Денисова А. Л., Щербакова А. В.* Математика в экономике: учебное пособие. — Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2002. — 80 с.

[7] Проект спецификации контрольных измерительных материалов для проведения в 2016 году Единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень). [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2015. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

[8] Проект демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов для проведения Единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень). [Электронный ресурс]. —

Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2015. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

[9] Кодификатор элементов содержания для составления контрольных измерительных материалов для проведения Единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2015. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

[10] Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений для проведения Единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2015. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

[11] Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (5–9 классы). Приказ Минобрнауки РФ №1897 от 17.12.2010 г. — Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938, свободный.

[12] Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (10–11 классы). Приказ Минобрнауки РФ №413 от 17.05.2012 г. — Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/2365, свободный.

ЕГЭ

Учебное издание

Кривенко Виктор Михайлович, **Дерезин** Святослав Викторович,
Коннова Елена Генриевна, **Резникова** Нина Михайловна,
Фридман Елена Михайловна, **Ханин** Дмитрий Игоревич

МАТЕМАТИКА ЕГЭ. ЗАДАЧА С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *А. Вартанов*
Компьютерная верстка *С. Дерезин*
Корректор *Л. Андрецова*

Подписано в печать с оригинал-макета 28.09.2015.
Формат 60х84 $^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,65.
Тираж 5000 экз. Заказ № **39**.

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009 зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Учебно-методический комплекс
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»
включает следующие основные издания
под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова
для обучающихся и учителей:

- Математика. ЕГЭ-2016. 10-11 классы. Тематический тренинг
- Математика. Подготовка к профильному уровню ЕГЭ-2016. 40 тренировочных вариантов.
- Математика. Решебник. Подготовка к профильному уровню ЕГЭ-2016. 40 тренировочных вариантов
- Математика. Подготовка к базовому уровню ЕГЭ-2016. 20 тренировочных вариантов
- Математика. 10-11 классы. Тренажёр для подготовки к ЕГЭ: алгебра, планиметрия, стереометрия
- Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Тригонометрия. Тренажёр
- Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Неравенства. Тренажёр
- Математика. Профильный уровень ЕГЭ-2016. Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы
- Математика. ЕГЭ-2016. Профильный уровень. Учимся выполнять задания с развёрнутым ответом (неравенства, задание с параметром, экономическая задача, олимпиадная задача)
- Математика. 7-11 классы. Карманный справочник
- Математика. Большой справочник для подготовки к ЕГЭ
- Математика. Задача с экономическим содержанием

Издательство включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009 зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ISBN 978-5-9966-0783-9

9 785996 607839

3... ону, а/я 550
Т... 8-14-03
... н: www.legionr.ru
... mrus.com